

基于秩约束逼近的系统模型降阶

李久芹, 杨洪礼

(山东科技大学 数学与系统科学学院, 山东 青岛 266590)

摘要: 针对 Daniel Ankelhed 在 2007 年根据控制器设计原理提出的降阶模型, 利用秩函数、核范数、谱范数与线性矩阵不等式的相互关系, 将秩约束条件转化为线性矩阵不等式, 使原降阶模型变为凸优化模型。数值试验表明降阶效果良好。

关键词: 系统降阶; 秩约束条件; 线性矩阵不等式; 凸优化模型

中图分类号: O231.1 文献标志码: A 文章编号: 1672-3767(2016)06-0114-09

System Model Order Reduction Based on Rank Constraints Approximation

LI Jiuqin, YANG Hongli

(College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: To improve the reduced order model proposed by Daniel Ankelhed in 2007 according to the controller design principle, the rank constraint was transformed into a linear matrix inequality and the reduced order model was transformed into a convex optimization model by using rank function, the nuclear norm, spectral norm and linear matrix inequality in relation to each other. Results of numerical tests indicate that the effect of this model is favorable.

Key words: system order reduction; rank constraint; linear matrix inequality; convex optimization model

工程应用领域中常常涉及到大型或者复杂动力系统的设计、仿真、优化和控制, 这个系统一般都是由微分或差分方程来描述, 方程的维数通常比较高, 物理或者工程实现比较困难。系统模型降阶十分必要, 降阶方法是控制理论与应用研究领域中的热点问题。高阶系统的降阶方法有很多, 其中较为有效的是 K. Glover^[1] 于 1984 年提出的 Hankel 范数降阶模型和 Moore^[2] 在 1981 年提出的平衡截断模型。这两种方法都能有效地降低高阶系统的阶次, 且既能保持原系统的可观、可控性及稳定性, 又能得到降阶系统与原始系统的误差关系。

Daniel Ankelhed^[3] 从控制器的设计出发, 将系统降阶原理与控制器设计原理相结合, 建立了系统降阶模型。然而模型中的秩约束条件是不连续且不可微的, 使得模型难以求解。结合对控制系统的最新研究^[4-6], 本文基于秩函数、核范数、谱范数与线性矩阵不等式的相互关系, 将模型中的秩约束条件改为线性矩阵不等式, 使其成为凸优化模型, 并通过实例验证其有效性。

S^n 是 $n \times n$ 阶对称矩阵的集合, $R^{m \times n}$ 是 $m \times n$ 阶实矩阵的集合, $A > 0$ ($A \geq 0$) 指 A 是正定(半正定)矩阵, $A < 0$ ($A \leq 0$) 指 A 是负定(半负定)矩阵, A^+ 指矩阵 A 的广义逆, $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 是系统的转换函数。

收稿日期: 2016-04-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(11241005)

作者简介: 李久芹(1990—), 女, 山东济南人, 硕士研究生, 主要从事最优控制理论与应用方面的研究。

杨洪礼(1974—), 男, 山东临沂人, 副教授, 博士, 主要从事优化理论与算法、最优控制理论与应用、非负矩阵与张量分解等方面的研究, 本文通信作者。E-mail: yhlmath@126.com

1 预备知识

引理 1(Schur 定理)^[7] 假定 $Q \in S^n, R \in S^m, S \in R^{n \times m}$, 则 $\begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \geq 0$ 等价于 $R \geq 0, Q - SR^+S^T \geq 0, S(I - RR^+) = 0$ 。

引理 2(非严格消除引理)^[8] 给定矩阵 $G \in R^{n \times n}, U \in R^{n \times m}, V \in R^{n \times p}$ 使得 U 的值域和 V 的值域是线性独立的。则存在 $X \in R^{m \times p}$ 使得 $G + UXV^T + VX^TU^T \leq 0$ 成立, 当且仅当 $U^\perp GU^{\perp T} \leq 0$ 且 $V^\perp GV^{\perp T} \leq 0$ 成立。其中 U^\perp, V^\perp 分别是 U, V 的正交矩阵。

引理 3(非严格有界实引理)^[9] 令 $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$,

$$L(S, \gamma) = \begin{pmatrix} SA + A^T S & SB & C^T \\ B^T S & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{pmatrix},$$

1) 如果 $S \in S^n$ 满足 $L(S, \gamma) \leq 0$, 则 $H(S)$ 是稳定的, 且 $\|H(S)\|_\infty \leq \gamma$;

2) 如果 A 是稳定的, 且 $\|H(S)\|_\infty \leq \gamma$ 和 $DD^T < \gamma^2 I$ 成立, 则存在 $S \in S^n$ 满足 $L(S, \gamma) \leq 0$ 。

引理 4^[10] 假设 $X = X^T \in R^{n \times n}, Y = Y^T \in R^{n \times n}, r$ 是一个正数, 则下面的描述是等价的:

1) $\begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \geq 0, \text{rank}(X - Y^{-1}) \leq r$;

2) 存在 $S = S^T \in R^{(n+r) \times (n+r)}$ 使得:

$$S = \begin{pmatrix} X & N \\ N^T & L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & M \\ M^T & * \end{pmatrix}^{-1} > 0.$$

定义 1(平衡实现)^[2] 令 (A, B, C, D) 为稳定系统的最小实现形式, 且 $Q, P \in S^n$ 为下面方程的解:

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \tag{1a}$$

$$A^T Q + QA + C^T C = 0. \tag{1b}$$

如果 P, Q 是彼此相等的对角阵, 则矩阵 (A, B, C, D) 所描述的系统是一个平衡系统。

定义 2(广义平衡实现) 令 (A, B, C, D) 为稳定系统的最小实现形式, 且 $Q, P \in S^n$ 为下面方程的解:

$$AP + PA^T + BB^T \leq 0, \tag{2a}$$

$$A^T Q + QA + C^T C \leq 0. \tag{2b}$$

如果 P, Q 是彼此相等的对角阵, 则矩阵 (A, B, C, D) 所描述的系统是一个广义平衡系统。如果由矩阵 (A, B, C, D) 所描述的系统满足(1)式和(2)式, 则该系统也是广义平衡系统。

定义 3(核范数) $\|X\|_* = \sum_{i=1}^r \sigma_i$, 其中 σ_i 是 X 的奇异值。

引理 5^[11] 对于任意的秩最大为 r 的矩阵 X , 其谱范数、Frobenius 范数、核范数三者之间满足:

$$\|X\|_2 \leq \|X\|_F \leq \|X\|_* \leq \sqrt{r} \|X\|_F \leq r \|X\|_2. \tag{3}$$

推论 1 对于任意矩阵 X , 有 $\frac{\|X\|_*}{\|X\|_2} \leq \text{rank}(X)$ 。

推论 2^[12] 对于任意满足 $\|X\|_2 \leq 1$ 的矩阵, 则 $\|X\|_* \leq \text{rank}(X)$, 即在谱范数定义的单位球上核范数是矩阵秩的一个凸下界。

推论 3 当 $\|X\|_2 \leq M$ 时, 有 $\frac{\|X\|_*}{M} \leq \text{rank}(X)$, 其中 M 为常数。

引理 6^[11] Z 是 $m \times n$ 维矩阵, 若其谱范数小于等于常数 t , 则可表示成一个线性矩阵不等式:

$$\|Z\|_2 \leq t \Leftrightarrow t^2 I_m - ZZ^T \geq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} tI_m & Z \\ Z^T & tI_n \end{pmatrix} \geq 0. \tag{4}$$

推论 4 Z 是含参数 t 的 $m \times n$ 维矩阵, 如果它的谱范数小于等于函数 $M(t)$, 则可表示成一个线性矩阵

不等式:

$$\|Z\|_2 \leq M(t) \Leftrightarrow [M(t)]^2 I_m - ZZ^T \geq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} M(t)I_m & Z \\ Z^T & M(t)I_n \end{pmatrix} \geq 0. \quad (5)$$

引理 7^[3] 假定矩阵 (A, B, C, D) 所描述的系统是一个稳定系统。令 $Q, P \in S^n$ 为方程(1)的解,对 Q, P 进行 Cholesky 分解,即 $P = U_P^T U_P, Q = U_Q^T U_Q$ 。对 $U_Q U_P^T$ 进行奇异值分解,即 $U_Q U_P^T = U \Sigma U^T$,其中 $U U^T = I, \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ 为系统的奇异值。令 $T = \Sigma^{-1/2} U^T U_Q$ 且

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T A T^{-1} & T B \\ C T^{-1} & D \end{pmatrix}. \quad (6)$$

则得到的新系统 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ 是平衡的。

2 H_∞ 控制器设计

为使从输入 w 到输出 z 的 H_∞ 范数变小,利用带有线性矩阵不等式的 H_∞ 控制器设计框架,找到一个控制器 K 。装置 H 和控制器 K 之间的关系如图 1 所示。

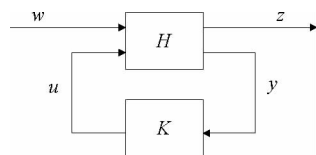


图 1 带有装置 H 和控制器 K 的标准 H_∞ 控制器设计框架

Fig. 1 The standard H_∞ controller design framework with device H and controller K

利用状态空间形式,装置 H 可以被分为下面的形式:

$$H = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

假定系统是可控和可观的,该装置可解决一系列的控制器设计问题。线性矩阵不等式方法可以用来解决控制器的设计问题。根据(7)式的划分,状态空间形式变为:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 \omega + B_2 u; \\ z &= C_1 x + D_{11} \omega + D_{12} u; \\ y &= C_2 x + D_{21} \omega + D_{22} u. \end{aligned}$$

当 $D_{22} = 0$ 时,存在控制器 K ;当 $D_{22} \neq 0$,则存在控制器 \tilde{K} ,使得 $K = \tilde{K}(I + D_{22} \tilde{K})^{-1}$ 。受篇幅所限,本文只对 $D_{22} = 0$ 的情况进行讨论。事实上, H_∞ 问题的解决,归根结底是在下列状态方程下找到一个动态控制器:

$$\begin{aligned} \dot{x}_K &= K_A x_K + K_B y; \\ u &= K_C x_K + K_D y. \end{aligned}$$

其中, $K_A \in \mathbf{R}^{k \times k}$ 保证了性能界限 γ ,在指数 K 下,令 $D_{22} = 0$,则闭环系统状态空间矩阵可表示为:

$$\begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & D_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I \\ D_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_D & K_C \\ K_B & K_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 & 0 & B_{21} \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

其中, $A_K \in \mathbf{R}^{(n+k) \times (n+k)}$ 。

由引理 3 可知,如果该闭环系统是稳定的,则存在正数 γ 和 $0 < S \in S^{(n+k) \times (n+k)}$ 使得(9)式成立。

$$\begin{pmatrix} S A_K + A_K^T S & S B_K & C_K^T \\ B_K^T S & -\gamma I & D_K^T \\ C_K & D_K & -\gamma I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S^T A_K & 0 & C_K \\ S^T B_K & 0 & D_K \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \leq 0. \quad (9)$$

将(8)式代入(9)式,再结合引理 4 中的第二个条件可得:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{X} & \mathbf{A}^T\mathbf{N} & \mathbf{X}\mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{N}^T\mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{N}^T\mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1^T\mathbf{X} & \mathbf{B}_1^T\mathbf{N} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{X}\mathbf{B}_2 & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T\mathbf{B}_2 & \mathbf{L} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{12} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_D & \mathbf{K}_C \\ \mathbf{K}_B & \mathbf{K}_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mathbf{R} \leq \mathbf{0}$$

其中, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_2^T\mathbf{K}_b^T\mathbf{B}_2^T\mathbf{N} + \mathbf{C}_2^T\mathbf{K}_b^T\mathbf{L}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_A^T\mathbf{N}^T + \mathbf{K}_C^T\mathbf{B}_2^T\mathbf{X}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{21}^T\mathbf{K}_b^T\mathbf{B}_2^T\mathbf{X}^T + \mathbf{D}_{21}^T\mathbf{K}_b^T\mathbf{N}^T & \mathbf{D}_{21}^T\mathbf{K}_b^T\mathbf{B}_2^T\mathbf{N} + \mathbf{D}_{21}^T\mathbf{K}_b^T\mathbf{L}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_{12}\mathbf{K}_D\mathbf{C}_2 & -\mathbf{D}_{12}\mathbf{K}_C & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

由引理 2 和引理 4 得到, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_A & \mathbf{K}_B \\ \mathbf{K}_C & \mathbf{K}_D \end{pmatrix}$ 的存在性等价于下式成立:

$$\chi^T \begin{pmatrix} \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{B}_1^T\mathbf{X} & -\gamma\mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I}_{p_1} \end{pmatrix} \chi \leq \mathbf{0}; \tag{10a}$$

$$\psi^T \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{A}^T & \mathbf{Y}\mathbf{C}_1^T & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{Y} & -\gamma\mathbf{I}_{p_1} & \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{D}_{11}^T & -\gamma\mathbf{I}_{m_1} \end{pmatrix} \psi \leq \mathbf{0}; \tag{10b}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}; \tag{10c}$$

$$\text{rank}(\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{I}) \leq k. \tag{10d}$$

其中, $\chi = \begin{pmatrix} \varphi_X & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{p_1} \end{pmatrix}$, $\psi = \begin{pmatrix} \varphi_Y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m_1} \end{pmatrix}$, φ_X 、 φ_Y 分别是 $(\mathbf{C}_2\mathbf{D}_{21})$ 和 $(\mathbf{B}_2^T\mathbf{D}_{12}^T)$ 的零空间。因此, H_∞ 控制器的设计问题就是找到 \mathbf{X} 、 \mathbf{Y} 和 $\gamma > 0$, 使得(10)式成立。

3 模型降阶

3.1 原始模型

模型降阶的目标是找到一个尽可能逼近原始系统的低阶系统, 以代替原来的高阶系统。关于降阶后得到的系统与原始系统之间的差异通常由 H_∞ 范数来衡量。原始系统 G_n 与降阶系统 \hat{G}_k 关系如图 2 所示, 图中虚线圈出的部分相当于图 1 中的装置 \mathbf{H} , \hat{G}_k 相当于图 1 中的控制器 \mathbf{K} 。

假设原始系统阶数为 n , 降阶系统的阶数为 k , 则系统的降阶问题可描述为以下模型:

$$\min \gamma \tag{11a}$$

$$\text{s. t } \|\mathbf{G}_n(s) - \hat{\mathbf{G}}_k(s)\|_\infty \leq \gamma \tag{11b}$$

$$k < n \tag{11c}$$

其中, γ 是模型降阶误差的上界, 根据图 2, 模型降阶问题可以被看成是 H_∞ 控制器设计问题, 问题(11)中 $H(s)$ 可以被定义为下列形式:

$$H(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_n(s) & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

降阶系统 \hat{G}_k 可看做控制器 \mathbf{K} , 图 2 中的虚线部分可看做装置 \mathbf{H} , 此处 $H(s)$ 的构造使问题得到了简化。由于 $(\mathbf{C}_2 \ \mathbf{D}_{21}) = (\mathbf{0} \ \mathbf{D})$ 和 $(\mathbf{B}_2^T \ \mathbf{D}_{12}^T) = (\mathbf{0} \ -\mathbf{D})$, 可令 $\varphi_X = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\varphi_Y = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ 。由(10a)、(10b)和(12)式可得:

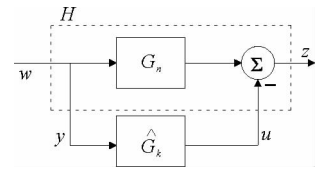


图 2 原始系统 G_n 与降阶系统 \hat{G}_k 关系图
Fig. 2 The relationship between the original system G_n and the reduced order system \hat{G}_k

$$\begin{pmatrix} \mathbf{XA} + \mathbf{A}^T \mathbf{X} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & -\gamma \mathbf{I} \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{AY} + \mathbf{YA}^T & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & -\gamma \mathbf{I} \end{pmatrix} \leq 0$$

令 $\mathbf{Q} = \gamma \mathbf{X}, \mathbf{P} = \gamma \mathbf{Y}$, 由舒尔实现定理(引理 1)可知, 降阶问题可描述为下列形式:

$$\min \gamma \tag{13a}$$

$$\text{s. t } \mathbf{QA} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} \leq 0 \tag{13b}$$

$$\mathbf{AP} + \mathbf{PA}^T + \mathbf{BB}^T \leq 0 \tag{13c}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{pmatrix} \geq 0 \tag{13d}$$

$$\text{rank}(\mathbf{QP} - \gamma^2 \mathbf{I}) \leq k \tag{13e}$$

$$\gamma > 0, \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbf{S}^n \tag{13f}$$

(13)式中, 秩约束条件是非凸的, 难以用线性矩阵不等式求解。用凸约束来近似秩约束, 一般有两种方法: 一是容许一部分不可行解存在, 扩大可行域; 二是减少部分解, 承认优化解可能不存在, 缩小可行域。本文采取第二种方法, 利用秩函数、核范数、谱范数与线性矩阵不等式的相互关系, 将秩约束条件转化为线性矩阵不等式, 缩小可行域。

3.2 凸优化降阶模型

定理 1 设 \mathbf{P}, \mathbf{Q} 是任意 $n \times n$ 矩阵, γ 是任意常数, 则有 $\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{pmatrix} = \text{rank}(\mathbf{QP} - \gamma^2 \mathbf{I}) + n$ 。

证明 对 $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{pmatrix}$ 进行初等变换得:

$$\begin{bmatrix} -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{\gamma} \mathbf{P} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{\gamma} \mathbf{Q} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{QP} - \gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

从而得到 $\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{pmatrix} = \text{rank}(\mathbf{QP} - \gamma^2 \mathbf{I}) + n$ 。

定理 2 已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{pmatrix}$ 是半正定矩阵, $\gamma > 0$, 则 \mathbf{P}, \mathbf{Q} 是半正定矩阵。

证明 对任意给定的向量 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$, 其中 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ 均为 n 维不同时为零的列向量,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' \mathbf{A} \mathbf{X} &= [\mathbf{X}'_1 \quad \mathbf{X}'_2] \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} = \\ & \mathbf{X}'_1 \mathbf{Q} \mathbf{X}_1 + \gamma \mathbf{X}'_2 \mathbf{X}_1 + \gamma \mathbf{X}'_1 \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}'_2 \mathbf{P} \mathbf{X}_2 \geq 0 \end{aligned}$$

假设 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{X}'_2 \mathbf{P} \mathbf{X}_2 \geq 0$, 可得 \mathbf{P} 为半正定矩阵。

假设 $\mathbf{X}_2 = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{X}'_1 \mathbf{Q} \mathbf{X}_1 \geq 0$, 可得 \mathbf{Q} 为半正定矩阵。

根据定理 1, $\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{pmatrix} = \text{rank}(\mathbf{QP} - \gamma^2 \mathbf{I}) + n$, 则(13e)式变为 $\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{pmatrix} \leq n + k$ 。根据推论

3, 首先估计出 $\| \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{pmatrix} \|_2$ 的上界; 然后根据推论 4, 将秩约束条件改为线性矩阵不等式, 使模型变为凸优化模型。

定理 3^[13] 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为 n 阶正定矩阵, 矩阵 \mathbf{A} 的 n 个特征值为 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, 矩阵 \mathbf{B} 的 n 个特征值为 $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$, 则矩阵 \mathbf{AB} 的特征值 $\lambda \in [\lambda_1 \mu_1, \lambda_n \mu_n]$ 。

推论 5^[13] 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为 n 阶半正定矩阵, 矩阵 \mathbf{A} 的 n 个特征值为 $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, 矩阵 \mathbf{B} 的 n 个特征

值为 $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$, 则矩阵 \mathbf{AB} 的特征值 $\lambda \in [0, \lambda_n \mu_n]$ 。

由(13d)式可知, $\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix}$ 是半正定矩阵, 设其 n 个特征值为 $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, 则 $\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix}^T$ 的 n 个特征值亦为 $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, 从而由推论 5 得: $\lambda(\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix}) \in [0, \lambda_n^2]$ 。

$$\begin{aligned} \text{根据 } \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \right\|_2 &= \sqrt{\lambda_{\max}(\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix})} \text{ 可得:} \\ \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \right\|_2^2 &= \lambda_{\max}(\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix}) \leq \\ &\lambda_n^2 \leq \\ &\text{trace}(\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix}^T) \cdot \text{trace}(\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix}) = \\ &(\text{trace}(\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix}))^2 = \\ &(\text{trace}(\mathbf{P}) + \text{trace}(\mathbf{Q}))^2 \end{aligned}$$

不妨记 $M = \text{trace}(\mathbf{P}) + \text{trace}(\mathbf{Q})$, 根据推论 3, 可得: 当 $\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \right\|_2 \leq M$ 时, $\text{rank}(\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix}) \leq n+k$,

$$\text{可近似为 } \frac{\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \right\|_*}{M} \leq n+k, \text{ 即 } \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \right\|_* \leq M(n+k)。$$

根据谱范数和核范数定义可知, $\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \right\|_2 \leq M(n+k)$ 。由推论 4 得:

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \right\|_2 \leq M(n+k) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} M(n+k)\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & M(n+k)\mathbf{I} & \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} & M(n+k)\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} & \mathbf{0} & M(n+k)\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}。$$

令 \mathbf{P}, \mathbf{Q} 为常数矩阵, 则模型(13)转化为下列凸优化问题:

$$\min \gamma; \tag{14a}$$

$$s. t. \mathbf{QA} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} \leq \mathbf{0}; \tag{14b}$$

$$\mathbf{AP} + \mathbf{PA}^T + \mathbf{BB}^T \leq \mathbf{0}; \tag{14c}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}; \tag{14d}$$

$$\begin{bmatrix} M(n+k)\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & M(n+k)\mathbf{I} & \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} & \gamma \mathbf{I} & M(n+k)\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \gamma \mathbf{I} & \mathbf{P} & \mathbf{0} & M(n+k)\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}; \tag{14e}$$

$$\gamma > 0, \mathbf{P}, \mathbf{Q} \geq \mathbf{0}。 \tag{14f}$$

4 模型算法

- 1) 给定系统 G , $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 是其最小实现形式, 通过引理 7 求出其平衡形式;
- 2) 确定降阶后的系统阶数 k ;
- 3) 根据模型(14)求出误差 γ ;
- 4) 求解得到降阶系统为 $\tilde{\mathbf{G}}_k(s) = \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{D}}$; 其中,

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_1 & \bar{\mathbf{A}}_{11} \bar{\Sigma}_1 + \bar{\mathbf{A}}_{11}^T & \bar{\Sigma}_1 \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{C}}_1 \bar{\Sigma}_1 & & \bar{\mathbf{D}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_1 & \bar{\mathbf{A}}_{12} + \bar{\mathbf{A}}_{21}^T \\ & \bar{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix} (\bar{\mathbf{A}}_{22} + \bar{\mathbf{A}}_{22}^T)^{-1} \times (\bar{\mathbf{A}}_{21} \bar{\Sigma}_1 + \bar{\mathbf{A}}_{12}^T \bar{\mathbf{B}}_2) \right] \begin{bmatrix} \Gamma_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix};$$

$$\Gamma_1^o = \bar{\Sigma}_1^o - \mathbf{I}_k, \bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_1 \gamma^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-k} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \gamma^{-1/2}, \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \gamma^{-1/2}, \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \gamma^{-1}.$$

5 数值实验

考虑如下系统^[3], 系数矩阵为:

例 1: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.6 & 2.8 \\ 0.4 & -72.7 & 0 \\ -1.6 & 0 & -72.1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.5 & 1.6 \\ 3.8 & 0 \\ 0 & 3.9 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -0.2 & 3.8 & 0 \\ -1 & 0 & 3.9 \end{bmatrix}.$

计算可得, 系统的 Hankel 奇异值为 $\sigma_1 = 2.1754, \sigma_2 = 0.1052, \sigma_3 = 0.0993$ 。利用 YALMIP^[14] 软件编写程序, 得到结果如表 1 所示。

表 1 降阶误差对比
Tab. 1 Reduced order error contrast

k	σ_{k+1}	$\sum \sigma_i$	Hankel	算法 A	算法 B	算法 C	本文算法
2	0.0993	0.0993	0.0993	0.0994	0.0994	0.0994	0.0377
1	0.1052	0.2045	0.1518	0.1058	0.1058	0.1060	0.0104
0	2.1754	2.3800	2.2695	2.2711	2.2711	2.1765	0.0289

根据上述算法, 当系统降为 1 阶、2 阶时, 降阶系统分别为:

$$\tilde{\mathbf{G}}_1(s) = \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}, \text{其中 } \tilde{\mathbf{A}} = -0.4016, \tilde{\mathbf{B}} = -4.7634, \tilde{\mathbf{C}} = -1.8624;$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_2(s) = \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}, \text{其中 } \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -0.4298 & 0.6453 \\ 0.4324 & -94.1051 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -2.1908 \\ 20.961 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{C}} = (-1.2457).$$

例 2: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3.2 & -1.4 & 1.8 & -8.4 & -5.1 \\ -1.4 & -1.8 & -0.9 & 0.1 & -10.3 \\ 1.8 & -0.9 & -7.8 & 10.9 & -31.2 \\ 33.9 & 33.0 & 21.8 & -82.5 & 0 \\ 45.4 & 38.8 & 16.5 & 0 & -80.3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.8 \\ 0 & 0.7 \\ -0.3 & 0 \\ 1.8 & 0 \\ 0 & 1.8 \end{bmatrix},$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -0.1 & 1.8 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.7 & 0 & 1.8 \end{pmatrix}.$$

系统的 Hankel 奇异值为 $\sigma_1 = 0.8743, \sigma_2 = 0.0304, \sigma_3 = 0.0202, \sigma_4 = 0.0197, \sigma_5 = 0.0052$ 。利用 YALMIP^[14] 软件编写程序, 得到结果如表 2 所示。

根据上述算法, 当系统降为 4 阶时, 降阶系统为:

$$\tilde{\mathbf{G}}_4(s) = \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}, \text{其中 } \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3.7818 & 0.2388 & 0.0605 \\ 0.2363 & 0.0147 & 0.0035 \\ 1.6812 & 0.1052 & 0.0245 \\ 0.0463 & 0.0035 & 0.0024 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -0.0037 & 0.1749 \\ 0 & 0.0111 \\ -0.0004 & 0.0712 \\ 0.0026 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -0.0014 & -0.001 & 0.0026 \\ -1.5174 & -0.0957 & -0.0221 & 0 \end{pmatrix}.$$

表 2 降阶误差对比

Tab. 2 Reduced order error contrast

k	σ_{k+1}	$\sum\sigma_i$	Hankel	算法 A	算法 B	算法 C	本文算法
4	0.005 2	0.005 2	0.005 2	0.005 2	0.005 2	0.005 2	0.005 0
3	0.019 7	0.024 9	0.020 2	0.020 7	0.020 6	0.020 0	0.006 0
2	0.020 2	0.045 0	0.028 6	0.026 6	0.026 6	0.024 4	0.005 9
1	0.030 4	0.075 4	0.039 7	0.045 9	0.045 9	0.032 6	0.027 0
0	0.874 3	0.949 7	0.910 9	0.904 4	0.904 4	0.896 1	0.025 6

例 3: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.3 & 0 & -3.6 & 1.4 & -4.2 & -1.2 \\ 0.2 & -1.1 & -0.1 & -0.7 & 43.1 & -5.7 \\ 3.6 & -0.3 & -0.3 & 0.7 & 4.1 & -0.5 \\ -1.3 & -0.6 & -0.9 & -0.6 & 23.5 & -2.7 \\ -2.3 & -4.5 & -3.8 & -4.2 & -72.5 & 0 \\ 1.2 & 2.9 & -0.3 & 3.5 & 0 & -71.8 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 2.4 & -2.1 \\ 0.9 & 0 \\ 0.1 & -0.4 \\ 3.8 & 0 \\ 0 & 3.9 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1.3 & 0.6 \\ -0.2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.4 & 0 \\ 3.8 & 0 \\ 0 & 3.9 \end{pmatrix}^T$ 。

系统的 Hankel 奇异值为 $\sigma_1 = 1.757 2, \sigma_2 = 1.196 8, \sigma_3 = 0.988 3, \sigma_4 = 0.277 2, \sigma_5 = 0.105 7, \sigma_6 = 0.100 1$ 。利用 YALMIP^[14] 软件编写程序,得到结果如表 3 所示。

表 3 降阶误差对比

Tab. 3 Reduced order error contrast

k	σ_{k+1}	$\sum\sigma_i$	Hankel	算法 A	算法 B	算法 C	本文算法
5	0.100 1	0.100 1	0.100 1	0.105 8	0.107 7	0.107 7	0.025 3
4	0.105 7	0.205 8	0.152 2	0.120 4	0.120 4	0.120 1	0.024 0
3	0.277 2	0.483 1	0.367 1	0.360 9	0.360 9	0.336 1	0.025 0
2	0.988 3	1.471 3	1.055 9	1.107 9	1.111 7	1.181 5	0.026 4
1	1.196 8	2.668 1	2.266 4	2.274 2	2.275 0	2.347 1	0.006 7
0	1.757 2	4.425 3	2.643 3	2.510 8	2.510 8	2.229 1	0.040 9

根据上述算法,当系统降为 3 阶时,降阶系统分别为:

$$\tilde{\mathbf{G}}_3(s) = \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}}, \text{ 其中 } \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -0.008 2 & -0.014 4 & -0.018 0 \\ 0.100 6 & 0.153 4 & 0.158 3 \\ 0.013 9 & 0.014 5 & 0.015 1 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0.101 3 & 0.003 5 \\ -1.018 5 & -0.015 1 \\ -0.091 0 & 0.001 7 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 0.061 6 & 0.083 7 & 0.086 6 \\ 0.003 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

6 结论

利用秩函数、核范数、谱范数与线性矩阵不等式的相互关系,将秩约束条件转化为线性矩阵不等式约束,得到凸优化模型。该优化模型求解简便,弥补了秩约束条件不连续不可微的缺点。通过数值实验,将改进后的模型与文献[3]中的降阶模型进行误差比较,得到的降阶误差小于文献[3]中的误差,说明改进后的模型降阶效果良好。

参考文献:

[1]GLOVER K. All optimal Hankel-norm approximations of linear multi-variable systems and their L_∞ -error bounds [J]. International Journal of Control,1984,39(6):1115-1193.
[2]MOORE B. Principal component analysis in linear systems:Controllability, observability and model reduction [J]. IEEE

- Transactions on Automatic Control, 1981, 26(1):17-32.
- [3] ANKELHED D, HELMERSSON A, HANSON A. Suboptimal model reduction using LMIs with convex constraints [J]. European Control Conference, 2007, 12(11):3-8.
- [4] BESSELINK B, TABAK U, et al. A comparison of model reduction techniques from structural dynamics, numerical mathematics and systems and control [J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(19):4403-4422.
- [5] ELIAS J, TOBIAS D, WIM M. Model reduction of time delay systems using position balancing and delay Lyapunov equations [J]. Mathematics of Control, Signals and Systems, 2013, 25(2):147-166.
- [6] SREERAM V, SAHLAM S. Improved results on frequency weighted balanced truncation and error bounds [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2012, 22(11):1195-1211.
- [7] BOYD S, EL GHAOUY L, FERON E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory [M] // Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997:27-29.
- [8] HELMERSSON A. Methods for robust gain scheduling [D]. Sweden: Dissertation Linköping University, 1995:1-221.
- [9] SCHERER C. The Riccati Inequality and State-Space H_∞ -Optimal Control [D]. Germany: University of Würzburg, 1990:1-266.
- [10] PACKARD A. Gain scheduling via linear fractional transformations [J]. Systems and Control Letters, 1994, 22(2):79-92.
- [11] 徐芳芳. 矩阵补全的模型、算法和应用研究 [D]. 上海: 上海交通大学, 2014:1-117.
- [12] FAZEL M. Matrix rank minimization with applications [D]. Stanford: Stanford University, 2002:1-130.
- [13] 唐建国. 两实对称矩阵乘积特征值的上下界 [J]. 延边大学学报(自然科学版), 2009, 35(4):1-3.
TANG Jianguo. Upper and lower bounds of the eigenvalues of the product of two real symmetric matrices [J]. Journal of Yanbian University (Natural Science), 2009, 35(4):1-3.
- [14] EFBERG J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB [C] // IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, Taipei, Sept. 2-4, 2004:287-292.

(责任编辑: 傅 游)

(上接第 113 页)

- [11] BAI Z. The method of lower and upper solutions for a bending of an elastic beam equation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2000, 248:195-202.
- [12] BAI Z, GE W, WANG Y. The Method of Lower and Upper Solutions for Some Fourth-Order Equations [J/OL]. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 2004, 5(1):13 [2016-05-13]. http://www.emis.ams.org/journals/JI-PAM/images/124_03_JIPAM/124_03_www.pdf.
- [13] LIAN H, ZHAO J, AGARWAL R. Upper and lower solution method for nth-order BVPs on an infinite interval [J/OL]. Boundary Value Problems, 2014:100 [2016-05-17]. <http://link.springer.com/article/10.1186%2F1687-2770-2014-100>.
- [14] WEI Z, PANG C. The method of lower and upper solutions for fourth order singular m-point boundary value problems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 322(2):675-692.
- [15] MA D, YANG X. Upper and lower solution method for fourth-order four-point boundary value problems [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 223(2):543-551.
- [16] WANG F, ZHENG Y. Lower and upper solutions for a discrete first-order nonlocal problems at resonance [J]. Journal of Nonlinear Sciences & Its Applications, 2015, 8(3):174-183.
- [17] LI Y. Positive solutions of fourth-order boundary value problems with two parameters [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 281(2):477-484.

(责任编辑: 傅 游)