一类带记忆项的非线性 Petrovsky 方程解的爆破时间下界估计

胡文燕[1],柴树根[2]
(1.晋中学院 数学学院,山西 晋中 030600;2.山西大学 数学科学学院,山西 太原 030006)

摘 要: 考虑如下具有记忆项的非线性 Petrovsky 方程:

$$u_{tt}+\Delta^2 u-\int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(x,\tau)\mathrm{d}\tau+|u_t|^{q-2}u_t=|u|^{p-2}u,$$

具 Dirichlet 边界条件的初边值问题。当松弛函数 g 满足适当的条件时,该问题的解在有限时间内会爆破。进一步对解的爆破时间进行研究,给出了正的初始能量下解的爆破时间的下界估计。

关键词: 非线性 Petrovsky 方程;记忆项;正的初始能量;爆破时间;下界估计

中图分类号: O175.23 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-3767(2017)03-0091-05

Lower Bounds for Blow-up Time of a Nonlinear Petrovsky Equation with Memory

HU Wenyan[1], CHAI Shugen[2]
(1. School of Mathematics, Jinzhong University, Jinzhong, Shanxi 030600, China;
2. School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan, Shanxi 030006, China)

Abstract: In this paper, we consider the initial boundary value problem with Dirichlet boundary conditions for the following nonlinear Petrovsky equation with a memory term:

$$u_{tt}+\Delta^2 u-\int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(t,\tau)\mathrm{d}\tau+|u_t|^{q-2}u_t=|u|^{p-2}u.$$

Under some certain conditions of function g, the solution of the problem blows up in a finite time. We complete the results by studying the lower bounds for the blow-up time of the blow-up solutions.

Key words: nonlinear Petrovsky equation; memory; positive initial energy; blow-up time; lower bounds

考虑如下带记忆项的非线性 Petrovsky 方程的初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt}+\Delta^2 u-\int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(x,\tau)\mathrm{d}\tau+|u_t|^{q-2}=|u|^{p-2}u, \\ u(x,0)=u_0(x), u_t(x,0)=u_1(x), x\in\Omega, \\ u(x,t)=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial\vec{v}}=0, x\in\partial\Omega, t\geqslant 0. \end{cases} \tag{※}$$

其中 $p>2$, $q>2$, $\Omega\subset R^n(n\geqslant 2)$ 是一边界光滑的有界区域,$\vec{v}$ 是边界$\partial\Omega$ 的单位外法线方向。

对于不带记忆项的 Petrovsky 方程:

收稿日期: 2016-09-12
基金项目: 国家自然科学基金项目(11171195)
作者简介: 胡文燕(1983—),女,山西平遥人,讲师,研究方向为偏微分方程. E-mail:huwy0007@163.com
柴树根(1969—),男,山西介休人,教授,博士生导师,主要从事应用数学研究.

$$u_{tt}+\Delta^2 u(t)+a\left|u_t\right|^{m-2}u_t=b\left|u\right|^{p-2}u\ ,\tag{1}$$

文献[1]证得当 $m<p$ 时，在负的初始能量下解在有限时间内会爆破的结论，文献[2]进一步给出了其解的全局存在性和衰减性。文献[3]对初始能量为正值的情形进行了研究，并给出了其解在有限时间内爆破的条件。

因为当爆破发生时，精确的爆破时刻往往是无法估算的，从而研究爆破时刻的上下界就变得非常重要。很多学者已经对抛物型方程的爆破时刻的下界估计做了大量研究，并得出了相应的结果[4-10]。文献[11]对如下不带记忆项的 Petrovsky 方程进行了研究：

$$u_{tt}+\Delta^2 u+au_t\left|u_t\right|^{p-2}=bu\left|u\right|^{q-2}\ ,\tag{2}$$

并给出了该方程在正的初始能量下解的爆破时间下界估计。

对于具有记忆项的 Petrovsky 方程：

$$u_{tt}+\Delta^2 u-\int_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u(x,s)\mathrm{d}\tau+\left|u_t\right|^{m-2}u_t=\left|u\right|^{p-2}u\ ,\tag{3}$$

文献[12]研究了其解的局部存在性，给出了当初始能量有上界时解在有限时间内会爆破的结论。

本文在前人工作基础上，进一步对具有记忆项的 Petrovsky 方程解的爆破时间进行研究，并给出了在正的初始能量下解的爆破时间的下界估计。

1 预备知识

考虑 Lebesgue 空间 $L^p(\Omega)$ 和 Sobolev 空间 $H^q(\Omega)$，对于不增的松弛函数 $g(t)$，假设如下：

(I_1) $g: R^+\to R^+$ 满足：

$$1-\int_0^\infty g(\tau)\mathrm{d}\tau=l>0\ ,\tag{4}$$

且

$$\int_0^\infty g(\tau)\mathrm{d}\tau<\frac{p(p-2)}{(p-1)^2},\tag{5}$$

$$g'(t)\leqslant 0,t\geqslant 0。\tag{6}$$

$$(\mathrm{I}_2)\ p\ 满足\begin{cases}2<p<\infty,n\leqslant 4,\\ 2<p\leqslant\dfrac{2(n-2)}{n-4},n>5。\end{cases}\tag{7}$$

$$(\mathrm{I}_3)\ q\ 满足\begin{cases}2<q<\infty,n\leqslant 4,\\ 2<q\leqslant\dfrac{2n}{n-4},n>4。\end{cases}\tag{8}$$

定理 1.1(局部存在定理) 假设 g,p,q 满足上述条件(I_1)—(I_3)，那么对于任意给定的 $(u_0,u_1)\in(H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega))\times L^2(\Omega)$，总存在 $T>0$，使得问题(※)存在唯一的局部解 $u(t)$，满足

$$u\in C([0,T];H_0^2(\Omega))\ ;$$

$$u_t\in C([0,T];L^2(\Omega))\cap L^q(\Omega\times(0,T))\ ;$$

$$u_{tt}\in L^\infty((0,T);L^2(\Omega))\ 。$$

证明 可以利用 Faedo-Galerkin 方法，证明其解的存在性和唯一性(参考文献[1])。

引理 1.1(Sobelev-Poincaré 不等式) 如果 p 满足条件(I_2)，那么对于任意的 $u\in H_0^2(\Omega)$ 有如下不等式成立：

$$\|u(t)\|_{2(p-1)}\leqslant C\|\Delta u(t)\|_2\ ,\tag{9}$$

其中 C 为 Sobolev 嵌入的最佳常数。

证明 由 Sobolev 嵌入定理，将 $H_0^2(\Omega)$ 嵌入到 $L^{2(p-1)}(\Omega)$，有

$$\|u(t)\|_{2(p-1)}\leqslant C_1\|u(t)\|_{H^2}\ ,$$

再由 Poincaré 不等式可得

$$\|u(t)\|_{2(p-1)}\leqslant C\|\Delta u(t)\|_2\ ,$$

证毕。

定义初边值问题(※)的能量函数 $E(t)$ 如下：

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}(1-\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau)\|\Delta u(t)\|_2^2+\frac{1}{2}(g\circ\Delta u)(t)-\frac{1}{p}\|u(t)\|_p^p, \tag{10}$$

其中 $(g\circ\Delta u)(t)=\int_0^t g(t-\tau)\|\Delta u(t)-\Delta u(\tau)\|_2^2\mathrm{d}\tau$。

$$E(0)=\frac{1}{2}\|u_1\|_2^2+\frac{1}{2}\|\Delta u_0\|_2^2+\frac{1}{2}(g\circ\Delta u_0)(0)-\frac{1}{p}\|u_0\|_p^p。$$

$$E_1=(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})C^{-\frac{2p}{p-2}}l^{\frac{p}{p-2}}。$$

引理 1.2[12] 假设 g,p,q 分别满足(I_1),(I_2),(I_3),且 $u(t)$ 为初边值问题(※)的解,那么

$$E'(t)=-\frac{1}{2}(\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau)\|\Delta u(t)\|_2^2+\frac{1}{2}(g'\circ\Delta u)(t)-\|u_t(t)\|_q^q\leqslant 0。$$

证明 将初边值问题(※)的方程两边同乘以 u_t,并在 Ω 上积分,运用格林公式,可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega|u_t|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta u(t)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_\Omega|u(t)|^p\mathrm{d}x\right)-\\&\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega\Delta u_t(t)\Delta u(\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau=-\|u_t\|_q^q,\end{aligned}\tag{11}$$

其中,

$$\begin{aligned}&\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega\Delta u_t(t)\Delta u(\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\\=&-\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega|\Delta u(t)|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}(g'\circ\Delta u)(t)-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g\circ\Delta u)(t)\\&+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau\int_\Omega|\Delta u(t)|^2\mathrm{d}x\right)。\end{aligned}\tag{12}$$

将(12)代入(11),由 $g'(t)\leqslant 0$,有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega|u_t|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|\Delta u(t)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_\Omega|u(t)|^p\mathrm{d}x\right)\\&+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g\circ\Delta u)(t)-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau\|\Delta u(t)\|_2^2\right)\\=&-\frac{1}{2}g(t)\|\Delta u(t)\|_2^2+\frac{1}{2}(g'\circ\Delta u)(t)-\|u_t\|_q^q\\\leqslant&-\frac{1}{2}g(t)\|\Delta u(t)\|_2^2-\|u_t\|_q^q\leqslant 0,\end{aligned}$$

即 $E'(t)\leqslant 0$,证毕。

定理 1.2[12] 假设 g,p,q 满足条件(I_1),(I_2),(I_3),那么当 $p>q$,且 $E(0)<E_1$,$l^{\frac{1}{2}}\|\Delta u_0\|>C^{-\frac{p}{p-2}}l^{\frac{p}{2(p-2)}}$ 时,初边值问题(※)的解在有限时间内会爆破。

详细证明过程见参考文献[12]。

2 主要结果及证明

引理 2.1[13] 若 $\Omega\subset R^2(n\geqslant 2)$ 为一光滑区域,当 $x\in\Omega$ 时,$u(x)$ 为一分段函数,当 $x\in\partial\Omega$ 时,$u(x)\equiv 0$,则下述不等式成立：

$$\int_\Omega u^{2s}\mathrm{d}s\leqslant\delta(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^s,$$

其中 s 满足 $\begin{cases}s>1,n=2,\\1<s<\dfrac{n}{n-2},n\geqslant 3,\end{cases}$,$\delta=(\dfrac{n-1}{n^{3/2}})^{2S}|\Omega|^{1-\frac{n-2}{n}s}$。

定理 2.2 若 u 为问题(※)的解,它在有限时刻 T 爆破,则

$$T \geqslant \int_{F(0)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{2^{2p-4} p^{2-p} C^{2(p-1)} l^{-1} y^{p-1} + y + pE(0) + 2^{2p-4} pC^{2(p-1)} l^{-1} E^{p-1}(0)},$$

其中 $F(0) = \|u_0\|_p^p$，C 满足不等式(9)，$l = 1 - \int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau$。

证明 由能量函数(10)式，有

$$2E(t) = \|u_t\|_2^2 + (1 - \int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau) \|\Delta u(t)\|_2^2 + (g \circ \Delta u)(t) - \frac{2}{p} \|u(t)\|_p^p,$$

那么

$$\|u_t\|_2^2 + (1 - \int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau) \|\Delta u(t)\|_2^2 = 2E(t) - (g \circ \Delta u)(t) + \frac{2}{p} \|u(t)\|_p^p$$
$$\leqslant 2E(t) + \frac{2}{p} \|u(t)\|_p^p .$$

由引理1.2，$E'(t) \leqslant 0$，即 $E(t) \leqslant E(0)$，将其代入上式可得

$$\|u_t\|_2^2 + (1 - \int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau) \|\Delta u(t)\|_2^2 \leqslant 2E(0) + \frac{2}{p} \|u(t)\|_p^p, \tag{13}$$

令 $F(t) = \int_\Omega |u|^p dx = \|u\|_p^p$，由柯西不等式及引理1.1，有

$$\begin{aligned}
F'(t) &= p\int_\Omega |u|^{p-2} u u_t \mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{p}{2}(\int_\Omega |u_t|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^{2(p-1)} \mathrm{d}x) \\
&\leqslant \frac{p}{2}(\|u_t\|_2^2 + C^{2(p-1)} \|\Delta u\|_2^{2(p-1)}) \\
&\leqslant \frac{p}{2}(2E(0) + \frac{2}{p}F(t) + C^{2(p-1)} \frac{1}{1 - \int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau}(2E(0) + \frac{2}{p}F(t))^{p-1}) \\
&\leqslant \frac{p}{2}(2E(0) + \frac{2}{p}F(t) + 2^{p-2} C^{2(p-1)} l^{-1} (2E(0))^{p-1} + (\frac{2}{p}F(t))^{p-1}) \\
&= 2^{2p-4} p^{2-p} C^{2(p-1)} l^{-1} F^{p-1}(t) + F(t) + pE(0) + 2^{2p-4} pC^{2(p-1)} l^{-1} E^{p-1}(0) 。
\end{aligned} \tag{14}$$

因为 $\lim\limits_{t \to T^-} F(t) = \infty$，所以

$$T \geqslant \int_{F(0)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{2^{2p-4} p^{2-p} C^{2(p-1)} l^{-1} y^{p-1} + y + pE(0) + 2^{2p-4} pC^{2(p-1)} l^{-1} E^{p-1}(0)},$$

其中 $l = 1 - \int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau$，证毕。

在定理2.1中，由于 C 并不是一个确切的值，故很难找到爆破时间 T 的准确下界，为此，假设 p 满足：

$$2 < p < \begin{cases} \infty, & n = 2, \\ \dfrac{2(n-1)}{n-2}, & n \geqslant 3. \end{cases} \tag{15}$$

显然，在此假设条件(I_2)仍成立。

定理2.3 假设 m,q 满足(I_1)，(I_3)，p 满足(15)式，若 $u(x,t)$ 为问题(※)的解，它在有限时刻 T 爆破，则

$$T \geqslant \int_{F(0)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{2^{2p-4} p^{2-p} l^{-1} \delta\lambda_1^{1-p} y^{p-1} + y + pE(0) + 2^{2p-4} p\delta\lambda_1^{1-p} l^{-1} E^{p-1}(0)},$$

其中 $F(0) = \|u_0\|_p^p$，$\lambda_1 > 0$ 为算子$-\Delta$在齐次 Dirichlet 边界条件下的第一特征值，且 $\delta = (\frac{n-1}{n^{\frac{3}{2}}})^{2(p-1)} |\Omega|^{1-\frac{n-2}{n}(p-1)}$。

证明 因为 $\lambda_1 > 0$ 为齐次 Dirichlet 边界条件下的第一特征值，所以

$$\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x \leqslant \lambda_1^{-1} \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x,$$

由 Hölder 不等式，有

$$
\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^2 &= \left(-\int_\Omega u\Delta u \mathrm{d}x\right)^2 \\
&\leqslant \int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x \cdot \int_\Omega |\Delta u|^2 \mathrm{d}x \\
&\leqslant \lambda_1^{-1} \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \cdot \int_\Omega |\Delta u|^2 \mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

即

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leqslant \lambda_1^{-1} \int_\Omega |\Delta u|^2 \mathrm{d}x。$$

由引理 2.1，取 $s = p-1$，可得

$$\int_\Omega |u|^{2(p-1)} \mathrm{d}x \leqslant \delta\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{p-1} \leqslant \delta\lambda_1^{1-p}\left(\int_\Omega |\Delta u|^2 \mathrm{d}x\right)^{p-1}$$

其中 $\delta = \left(\frac{n-1}{n^{3/2}}\right)^{2(p-1)} |\Omega|^{1-\frac{n-2}{n}(p-1)}$。又因为

$$\| u(t) \|_{2(p-1)} \leqslant C \|\Delta u(t)\|_2,$$

所以 $C^{2(p-1)} \leqslant \delta\lambda_1^{1-p}$，将其代入(14)式，可得

$$F'(t) \leqslant 2^{2p-4} p^{2-p} l^{-1} \delta\lambda_1^{1-p} F^{p-1}(t) + F(t) + pE(0) + 2^{2p-4} p\delta\lambda_1^{1-p} l^{-1} E^{p-1}(0)。$$

因为 $\lim\limits_{t\to T^-} F(t) = \infty$，所以

$$T \geqslant \int_{F(0)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{2^{2p-4} p^{2-p} l^{-1} \delta\lambda_1^{1-p} y^{p-1} + y + pE(0) + 2^{2p-4} p\delta\lambda_1^{1-p} l^{-1} E^{p-1}(0)},$$

证毕。

参考文献：

[1]MESSAOUDI S A. Global existence and nonexistence in a system of Petrovsky[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications,2002,265(2):296-308.

[2]MESSAOUDI S A. Global existence and decay of solutions to a system of Petrovsky[J]. Mathematical Sciences Research Journal,2002,6(11):534-541.

[3]CHEN W,ZHOU Y. Global nonexistence for a semilinear Petrovsky equation[J]. Nonlinear Analysis,2009,70(9):3203-3208.

[4]BAGHAEI K,HESAARAKI M. Lower bounds for the blow-up time in the higher-dimensional nonlinear divergence form parabolic equations[J]. Comptes Rendus de l'Académie,2013,351(19):731-735.

[5]BAO A,SONG X. Bounds for the blow up time of the solutions to quasi-linear parabolic problems[J]. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik,2014,65(1):115-123.

[6]LIU Y,LUO S,YE Y. Blow-up phenomena for a parabolic problem with a gradient nonlinearity under nonlinear boundary conditions[J]. Computers & Mathematics with Applications,2013,65(8):1194-1199.

[7] LIU Y. Blow-up phenomena for the nonlinear nonlocal porous medium equation under Robin boundary condition[J]. Computers & Mathematics with Applications,2013,66(10):2092-2095.

[8] LIU Y. Lower bounds for the blow-up time in a non-local reaction diffusion problem under nonlinear boundary conditions [J]. Mathematical and Computer Modelling,2013,57(3):926-931.

[9] PAYNE L E,PHILIPPIN G A. Blow-up phenomena in parabolic problems with dependent coefficients under Dirichlet boundary conditions[J]. Proceedings of the American Mathematical Society,2013,141(7):2309-2318.

[10]SONG J C. Lower bounds for the blow-up time in a non-local reaction-diffusion problem[J]. Applied Mathematics Letters,2011,24(5):793-796.

[11]ZHOU J. Lower bounds for blow-up time of two nonlinear wave equations[J]. Applied Mathematics Letters,2015,45(2):64-68.

[12]LI F S,GAO Q Y. Blow-up of solution for a nonlinear Petrovsky type equation with memory[J]. Applied Mathematics and Computation,2016,274(2):383-392.

[13]PHILIPPIN G A. Lower bounds for blow-up time in a class of nonlinear wave equation[J]. Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik und Physik,2015,66(1):129-134.

（责任编辑：傅　游）