

# 基于滑模控制的双约束条件下协同制导律的设计

杨其伟, 王向华

(山东科技大学 电气与自动化工程学院, 山东 青岛 266590)

**摘要:**针对多枚导弹打击同一目标的问题,进行协同制导律的设计。采用了能实现有限时间收敛的终端滑模控制法,既能满足攻击时间约束,又能实现期望的末端角度,并用李雅普诺夫稳定性理论证明了所得到的结果。最后通过仿真验证了提出的制导律的有效性。

**关键词:**导弹制导律;攻击时间约束;终端角度约束;滑模控制;李雅普诺夫稳定性

中图分类号:TJ765.3

文献标志码:A

文章编号:1672-3767(2017)04-0080-07

DOI:10.16452/j.cnki.sdkjzk.2017.04.012

## Cooperative Guidance Law Design Based on Sliding Mode Control with Impact Time and Terminal Angle Constraints

YANG Qiwei, WANG Xianghua

(College of Electrical Engineering and Automation, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

**Abstract:** In this paper, a missile cooperative guidance law was designed to solve the problem of multiple missiles hitting the same target. With the terminal angle and impact time as constraints, a finite time convergence sliding mode control method was used to obtain the missile guidance law. The obtained result was proved by Lyapunov stability theory. A simulation was conducted and the results verified the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** missile guidance law; impact time; terminal angle; sliding mode control; Lyapunov stability

第二次世界大战以来,随着军事科技的快速发展,目标智能化程度和机动能力越来越高,且部分目标还具有释放诱饵的能力。在此情况下,单枚导弹难以完成高精度的打击任务。同时由于现代防御体系已经逐渐形成天、空、海、潜、陆综合一体化的结构方式,单枚导弹很难实现突防,而多枚导弹可以通过相互掩护、功能互补提高导弹的突防能力,能够完成单枚导弹不易完成的任务<sup>[1]</sup>。多导弹协同作战是制导控制领域一个新兴发展方向和研究前沿,也是未来一种重要的作战方式。协同制导律的设计是导弹协同作战的关键技术之一。

在多枚导弹协同攻击同一目标的时候,还需考虑多末端约束条件限制,比如脱靶量、攻击时间、末端角度以及速度等。Jeon等<sup>[2]</sup>将传统的比例导引律(proportional navigation guidance law, PNG)与攻击时间误差的反馈相结合,设计出一种可以打击静态目标的制导律。Kang等<sup>[3]</sup>采用最优控制的方法设计了一种满足攻击时间约束的制导律,对弹目相对运动方程进行小角度假设和线性化近似。Saleem<sup>[4]</sup>、Cho<sup>[5]</sup>和Kumar<sup>[6]</sup>等

收稿日期:2017-04-05

基金项目:青岛市博士后应用研究项目(2015179);山东省博士后创新项目;山东科技大学研究生科技创新项目(SDKDYC170354)

作者简介:杨其伟(1993—),男,山东烟台人,硕士研究生,主要从事导弹一体化容错控制研究. E-mail:qiwei\_yang@qq.com

王向华(1986—),女,山东威海人,博士后,主要从事制导与控制研究,本文通信作者。

E-mail:xianghuaw@pku.edu.cn

基于 Lyapunov 稳定性理论的方法设计了能满足攻击时间约束的制导律。Saleem 等<sup>[4]</sup>使用贝塔函数构造出攻击时间的表达式,可以通过控制参数来控制攻击时间。Cho<sup>[5]</sup>和 Kumar<sup>[6]</sup>等引入既不可量测又不可精确估计的剩余飞行时间。Li 和 Zhang 等<sup>[7-8]</sup>把滑模控制与时下流行的控制方法,如小波神经网络(wavelet neural network, WNN)、自适应模糊推理系统(adaptive network-based fuzzy inference system, ANFIS)结合起来,提出了一种可以控制末端角度的制导律。

Kim 等<sup>[9]</sup>首次提出了一种满足脱靶量和末端角度约束的次最优制导律,该制导律考虑了机动弹头制导过程中的末端角度约束问题。Lee<sup>[10]</sup>和 Tao<sup>[11]</sup>等采用最优控制的策略设计了带有末端角度约束的末端制导律,虽然可以通过最优控制的方法建立数学模型,但是飞行器在实际运行中会受到很多干扰,造成模型具有不小的误差,进而降低了制导精度。Ratnoo 等<sup>[12]</sup>在 PNG 的基础上引入带末端角度约束的变比例系数制导律,该制导律可以用于打击固定目标。Erer 等<sup>[13]</sup>设计了一种能对末端角度实现较强控制的制导律,但是针对机动目标进行攻击时末端角度偏差较大。Lee 等<sup>[14]</sup>也提出了一种攻击时间和末端角度同时约束的制导律,但是其推导过程较为复杂,不适合推广应用。Harl 等<sup>[15]</sup>用滑模控制的方法设计了一种攻击时间和末端角度同时约束的制导律,具有很好的鲁棒性。Kumar 等<sup>[16]</sup>设计了一种可以在攻击时间约束和末端角度约束的制导律之间切换的方法,可以用来攻击恒速的目标。

本文提出一种同时考虑攻击时间和末端角度约束的制导律。主要思路是将整个飞行过程分成两个阶段:第一阶段基于终端滑模控制的方法设计制导律,使得视线角的变化率在有限时间收敛到零并保持为零;第二阶段导弹则沿着视线飞行直到击中目标。攻击时间为两个阶段的时间之和,所设计的制导律可使导弹以期望的角度打击目标,而且该角度可任意设计。同时能够给出攻击时间的范围,所获得的结果可应用到多枚导弹协同攻击同一目标中。

## 1 模型介绍

为了简化研究对象,在导弹制导律设计的初步阶段,通常将导弹和目标看做质点。因为目标的速度相对导弹的速度可以忽略不计,所以在描述制导律时假设导弹的速度为常数并且目标静止。同时由于导弹的时间常数远小于目标的时间常数,自动驾驶仪和传感器的动力学特性可以忽略。

考虑如图 1 所示的导弹目标相对运动几何模型,其中:  $R$  为导弹与目标之间的距离,  $R = 0$  记为导弹击中目标;  $\gamma$  为导弹的航向角,也称为导弹的弹道倾角,即导弹的速度矢量与基准线之间的夹角;  $\lambda$  为导弹的视线角,即目标线与基准线之间的夹角。若以导弹为原点,基准线为半径逆时针旋转到目标线上时,则  $\lambda$  为正;  $x$ 、 $y$  为导弹的瞬时位置分量;  $\mathbf{V}$  为导弹的速度;  $\mathbf{a}_m$  为导弹的加速度;  $\sigma$  为导弹的速度矢量与目标线之间的夹角,称为航向误差角。

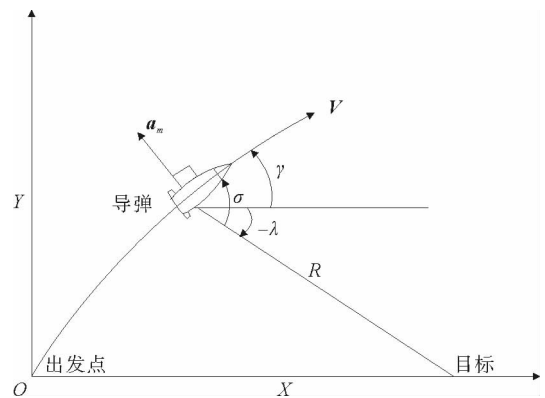


图 1 导弹攻击的几何模型

Fig. 1 Missile-target engagement geometry

由图 1 可知,航向误差角的计算公式为

$$\sigma = \gamma - \lambda, \quad (1)$$

将导弹速度矢量  $\mathbf{V}$  分别沿基准线和与基准线垂直的方向上分解,导弹的瞬时位置分量的导数分别为

$$\dot{x} = \mathbf{V} \cos \gamma, \quad (2)$$

$$\dot{y} = \mathbf{V} \sin \gamma. \quad (3)$$

再将导弹速度矢量  $\mathbf{V}$  沿目标线的方向及其法线方向进行分解。沿目标线方向的分量  $\mathbf{V} \cos \sigma$  是指向目标,它使相对距离  $R$  减小,由此

$$\dot{R} = -\mathbf{V} \cos \sigma, \quad (4)$$

沿目标线方向的法线分量  $V \sin \sigma$  使目标线以目标为原点逆时针旋转, 使目标视线角  $-\lambda$  增大, 可得

$$\dot{\lambda} = \frac{-V \sin \sigma}{R}, \quad (5)$$

导弹加速度  $a_m$  垂直于速度  $V$ , 导弹航向角的偏转率为

$$\dot{\gamma} = \frac{a_m}{V}, \quad (6)$$

综上所述, 可以得到导弹攻击目标的运动学方程组为

$$\begin{cases} \sigma = \gamma - \lambda \\ \dot{x} = V \cos \gamma \\ \dot{y} = V \sin \gamma \\ \dot{R} = -V \cos \sigma \\ \dot{\lambda} = \frac{-V \sin \sigma}{R} \\ \dot{\gamma} = \frac{a_m}{V} \end{cases}. \quad (7)$$

## 2 制导律设计

### 2.1 设计思路

将攻击时间  $t_f$  划分为两段, 即  $0 \sim t_c$  和  $t_c \sim t_f$ , 如图 2 所示。设计目标为: 在  $0 \sim t_c$  段, 设计制导律使得  $\lambda \rightarrow \lambda^*$  且  $\dot{\lambda} \rightarrow 0$ , 其中  $\lambda^*$  是期望的终端角度; 在  $t_c \sim t_f$  阶段, 设计制导律使得  $\dot{\lambda} = 0$ 。

则在  $t_f$  时导弹能以期望的末端角度  $\lambda^*$  打击目标, 以实现最佳的攻击效果。

由上述分析定义两个状态变量

$$x_1 = \lambda - \lambda^*, \quad (8)$$

$$x_2 = \dot{\lambda}, \quad (9)$$

其中,  $\lambda^*$  为期望的末端角度。

分别对式(8)和式(9)微分可得

$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{\lambda}, \quad (10)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d\dot{\lambda}}{dt}, \quad (11)$$

把式(5)代入式(11), 得到  $x_2$  的导数

$$\dot{x}_2 = -V \frac{\cos \sigma \cdot \dot{\sigma} R - \sin \sigma \cdot \dot{R}}{R^2}, \quad (12)$$

对式(1)求导可得

$$\dot{\sigma} = \dot{\gamma} - \dot{\lambda}, \quad (13)$$

把式(4)和式(13)代入式(12)得到

$$\dot{x}_2 = -V \frac{\cos \sigma (\dot{\gamma} - \dot{\lambda}) R + \sin \sigma \cdot V \cos \sigma}{R^2}, \quad (14)$$

再将式(5)和式(6)代入式(14)中, 可得

$$\dot{x}_2 = -\frac{\cos \sigma}{R} a_m - \frac{2V^2 \sin \sigma \cos \sigma}{R^2}. \quad (15)$$

### 2.2 主要结果

提出如下制导律:

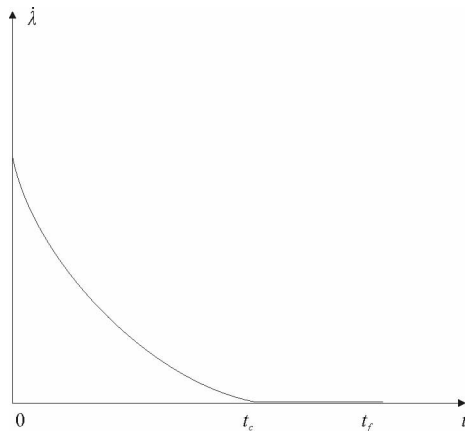


图 2 视线角的变化率随时间的变化

Fig. 2 The derivative of line-of-sight angle variation

$$a_m = \frac{R}{\cos\sigma} \left[ -\frac{2V^2 \sin\sigma \cos\sigma}{R^2} + \beta \frac{q}{p} x_2^{2-p/q} + \eta \operatorname{sgn}(s) \right], \quad (16)$$

其中

$$s = x_1 + \frac{1}{\beta} x_2^{p/q}. \quad (17)$$

在式(17)中  $1 < p/q < 2, \eta > 0, \beta > 0$  且  $\beta$  是一个常数。 $p$  和  $q$  是正奇数且  $p > q$ 。

**定理 1** 在制导律(16)下,  $\lambda$  在有限时间趋于  $\lambda^*$ ,  $\dot{\lambda}$  在有限时间趋于零。

### 2.3 主要结果证明

证明分为两步: 第一步证明在有限时间  $s \rightarrow 0$ ; 第二步证明在有限时间  $x_2 \rightarrow 0$ 。

构造系统的能量函数为

$$V_1 = \frac{1}{2} s^2, \quad (18)$$

对能量函数进行微分可得

$$\dot{V}_1 = s \dot{s}, \quad (19)$$

对式(17)  $s = x_1 + \frac{1}{\beta} x_2^{p/q}$  微分可得

$$\dot{s} = \dot{x}_1 + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{p}{q} x_2^{p/q-1} \dot{x}_2, \quad (20)$$

再将式(16)代入式(15)中可得

$$\dot{x}_2 = -\beta \frac{q}{p} x_2^{2-p/q} - \eta \operatorname{sgn}(s), \quad (21)$$

然后再将式(10)和式(21)代入式(20)中可得

$$\dot{s} = -\frac{1}{\beta} \cdot \frac{p}{q} \eta x_2^{p/q-1} \operatorname{sgn}(s), \quad (22)$$

把式(22)两边同时乘以  $s$  得

$$s \dot{s} = -\frac{1}{\beta} \cdot \frac{p}{q} \eta x_2^{p/q-1} |s|. \quad (23)$$

因  $p$  和  $q$  为正奇数且  $1 < p/q < 2$ , 在  $x_2 \neq 0$  条件下,  $x_2^{p/q-1} > 0$ 。令  $\rho(x_2) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{p}{q} \eta x_2^{p/q-1}$ 。

当  $x_2 \neq 0$  时

$$\begin{cases} s \dot{s} = -\rho(x_2) |s| \\ \rho(x_2) > 0 \end{cases}. \quad (24)$$

所以可得当  $x_2 \neq 0$  时  $\dot{V}_1$  为负定。显然  $V_1$  为正定的, 因此当  $x_2 \neq 0$  时, 李雅普诺夫稳定性的条件是满足的, 在有限的时间内能够实现滑模面  $s = 0$  [17]。

对于  $x_2 = 0$  的情况, 将  $x_2 = 0$  代入式(21)中得到  $\dot{x}_2 = -\eta \operatorname{sgn}(s)$ 。当  $s > 0$  时  $\dot{x}_2 = -\eta$  即  $x_2$  单调递减; 当  $s < 0$  时  $\dot{x}_2 = \eta$  即  $x_2$  单调递增, 即  $x_2 = 0$  且  $s \neq 0$  不是稳定的平衡点。系统的相位图如图 3 所示。

当实现  $s = 0$  状态时, 由式(17)可得

$$x_1 = -\frac{1}{\beta} x_2^{p/q}, \quad (25)$$

令能量函数为

$$V_2 = \frac{1}{2} x_1^2, \quad (26)$$

对能量函数进行微分可得

$$\dot{V}_2 = x_1 \dot{x}_1, \quad (27)$$

将式(10)代入式(27)中可得

$$\dot{V}_2 = x_1 x_2, \quad (28)$$

把式(25)进行变形得

$$x_2 = (-\beta x_1)^{q/p}, \quad (29)$$

将式(29)代入式(28)中可得

$$\dot{V}_2 = (-\beta)^{q/p} x_1^{(p+q)/p}, \quad (30)$$

最后将式(26)变形代入式(30)中可得

$$\dot{V}_2 = (-\beta)^{q/p} \cdot 2V \frac{p+q}{2p}. \quad (31)$$

因为  $q$  和  $p$  为正奇数, 又因为  $V_2$  是正定的, 显然  $\dot{V}_2$  是负定的, 所以当  $s = 0$  时  $x_1$  和  $x_2$  将在有限时间趋于零, 至此完成定理 1 的证明。

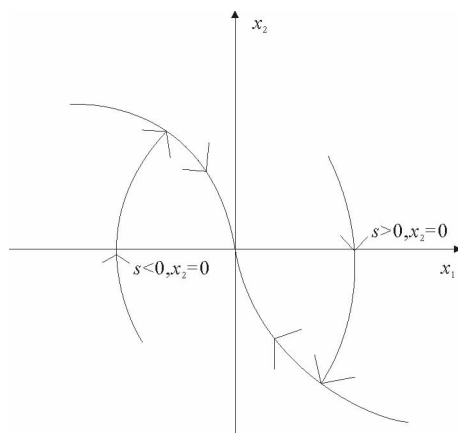


图 3 系统的相位图

Fig. 3 The phase plot of the system

### 3 仿真结果与分析

为了验证结论, 利用 MATLAB 对制导律进行仿真。设

共有三枚导弹参与齐射, 当弹目距离小于 1 m 时停止仿真。Simulink 的仿真开始时间是 0.0, 采用固定步长, 每步 0.001。三枚导弹从三个坐标点攻击位于原点(0,0)处的目标。详细仿真参数如表 1 所示。

表 1 三枚导弹攻击目标的仿真数据

Tab. 1 Simulation data for three missiles attacking the same target

仿真参数	第一枚导弹的参数	第二枚导弹的参数	第三枚导弹的参数
导弹速度 $v/(m/s)$	200	200	200
弹目距离 $R/m$	10 000	10 000	10 000
导弹初始位置坐标/m	(-6 000, 8 000)	(6 000, 8 000)	(-6 000, -8 000)
导弹的期望的视线角 $\lambda^*/rad$	$-70 \cdot \pi/180$	$-150 \cdot \pi/180$	$40 \cdot \pi/180$
导弹初始的视线角 $\lambda_0/rad$	$-53 \cdot \pi/180$	$-127 \cdot \pi/180$	$53 \cdot \pi/180$
导弹的初始航向角 $\gamma_0/rad$	$\pi/9$	$-60 \cdot \pi/180$	$120 \cdot \pi/180$
制导律的影响参数 $\beta$	0.004	0.004	0.004
制导律的影响参数 $p$	3	3	3
制导律的影响参数 $q$	5	5	5
制导律的影响参数 $\eta$	0.001	0.001	0.001

得到的仿真图如图 4~6 所示。

从图 4(a)~(c)可以看出, 所设计的协同制导律可以使状态变量  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$  和滑模面  $s$  在有限的时间内趋于零, 从图 4(d)可以看出, 三枚导弹可以期望的末端角度对目标进行打击。从图 5 中可以看出, 三枚导弹能够完成从不同位置打击同一目标的任务。相比较平行接近法(parallel approach method, 导引关系方程为  $\frac{d\lambda}{dt} = 0$ )为一条直线弹道, 本文设计的协同制导律导弹较为弯曲, 能够充分利用导弹的机动能力对目标进行打击。从图 6 中可以得到三枚导弹的攻击时间  $t_f$ , 从中选取一个最大的时间设为三枚导弹共同的攻击时间  $t_d$ , 从图中可得  $t_d$  为第二枚导弹的攻击时间 56.594 s。

通过对所设计的制导律进行仿真, 验证了制导律的稳定性以及导弹满足攻击时间和末端角度同时约束的条件。当三枚导弹协同攻击目标时, 三枚导弹能以预先设定的攻击时间和末端角度打击目标。

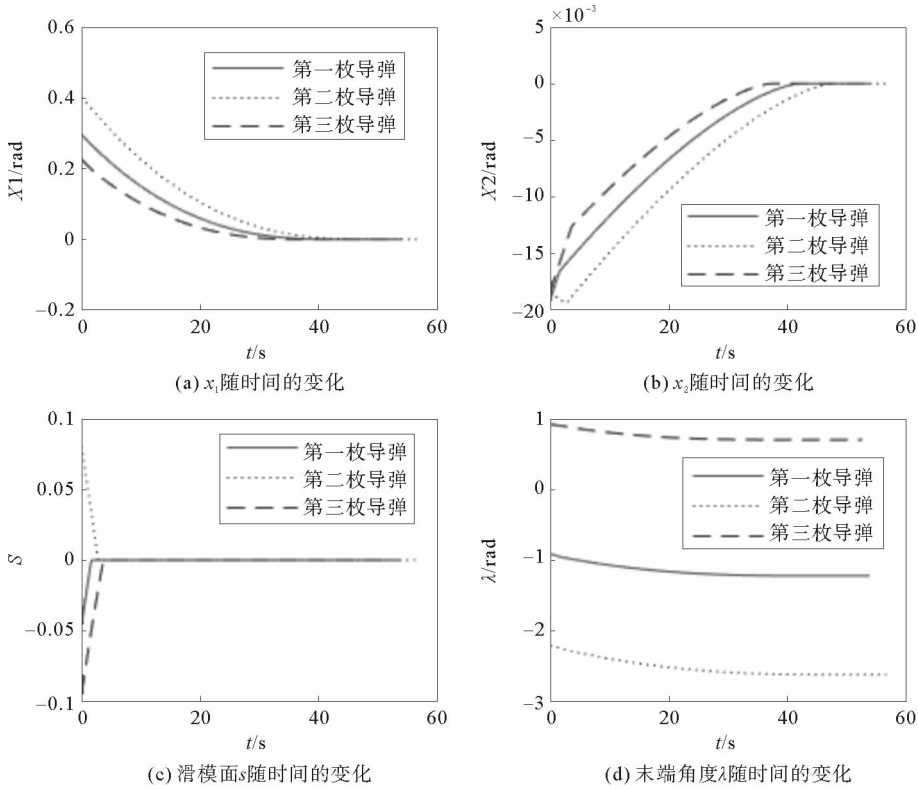


图 4  $x_1$ 、 $x_2$  和滑模面  $s$  以及末端角度  $\lambda$  随时间的变化

Fig. 4 Histories of  $x_1$  and  $x_2$ , sliding surface  $s$ , and terminal impact angle  $\lambda$

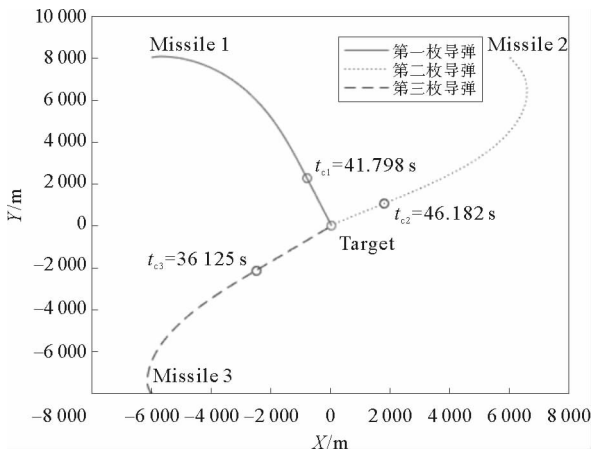


图 5 三枚导弹的制导路径

Fig. 5 Trajectories of three missiles

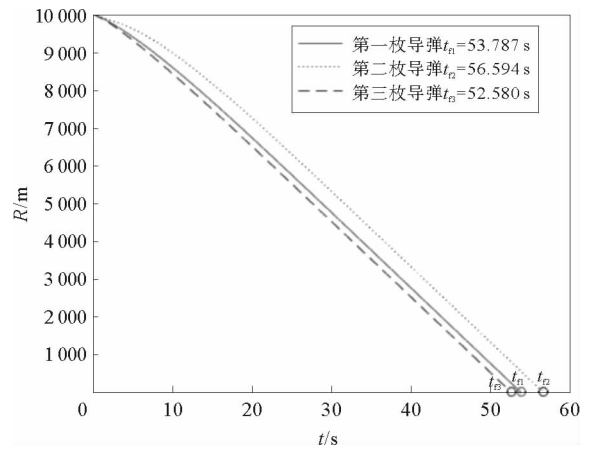


图 6 三枚导弹的弹目距离随时间的变化

Fig. 6 Histories of missile target distance

## 4 结论

在攻击时间和末端角度同时约束的条件下,使用有限时间收敛的滑模控制方法设计了一种用于攻击同一个目标的协同制导律。把攻击时间分为两段,在第一阶段使用有限时间收敛的滑模控制方法使得状态变量在有限时间内收敛到零并保持为零,在第二阶段令导弹沿着视线飞行,直至击中目标。三枚导弹攻击同一目标的仿真模拟验证了所设计的协同制导律的可行性。

参考文献:

- [1]张克,刘永才,关世义.体系作战条件下飞航导弹突防与协同攻击问题研究[J].战术导弹技术,2005(2):1-7.  
ZHANG Ke,LIU Yongcai,GUAN Shiyi. An investigation into the issues of penetration and cooperative engagement for aerodynamic missile under the condition of systems countermeasures[J]. Tactical Missile Technology,2005(2):1-7.
- [2]JEON I S,LEE J I,TAHK M J. Impact-time-control guidance law for anti-ship missiles[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology,2006,14(2):260-266.
- [3]KANG S,KIM H J. Differential game missile guidance with impact angle and time constraints[J]. IFAC Proceedings Volumes,2011,44(1):3920-3925.
- [4]SALEEM A,RATNOO A. Lyapunov-based guidance law for impact time control and simultaneous arrival[J]. Journal of Guidance Control & Dynamics,2015,39(1):164-173.
- [5]CHO D,KIM H J,TAHK M J. Nonsingular sliding mode guidance for impact time control[J]. Journal of Guidance Control & Dynamics,2015,39(1):61-68.
- [6]KUMAR S R,GHOSE D. Impact time guidance for large heading errors using sliding mode control[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,2015,51(4):3123-3138.
- [7]LI Q C,ZHANG W S,HAN G,et al. Finite time convergent wavelet neural network sliding mode control guidance law with impact angle constraint[J]. International Journal of Automation and Computing,2015,12(6):588-599.
- [8]LI Q,ZHANG W,HAN G,et al. Adaptive neuro-fuzzy sliding mode control guidance law with impact angle constraint[J]. IET Control Theory & Applications,2015,9(14):2115-2123.
- [9]KIM M,GRIDER K V. Terminal guidance for impact attitude angle constrained flight trajectories[J]. IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems,1973,9(6):852-859.
- [10]LEE Y I,KIM S H,TAHK M J. Optimality of linear time-varying guidance for impact angle control[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,2012,48(4):2802-2817.
- [11]TAO C,SONGYAN W,MING Y. Angular constrained guidance law and its optimization with hybrid optimization algorithm[C]//Guidance,Navigation and Control Conference,Yantai;IEEE Press,2015:2455-2460.
- [12]RATNOO A,GHOSE D. Impact angle constrained interception of stationary targets[J]. Journal of Guidance Control & Dynamics,2012,31(6):1816-1821.
- [13]ERER K S,MERTTOPCUOGLU O. Indirect impact-angle-control against stationary targets using biased pure proportional navigation[J]. Journal of Guidance,Control,and Dynamics,2012,35(2):700-704.
- [14]LEE J I,JEO I S,TAHK M J. Guidance law to control impact time and angle[J]. IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems,2007,2(1):301-310.
- [15]HARL N,BALAKRISHNAN S N. Impact time and angle guidance with sliding mode control[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology,2012,20(6):1436-1449.
- [16]KUMAR S R,GHOSE D. Impact time and angle control guidance[C]//AIAA Guidance,Navigation,and Control Conference,Kissimmee;American Institute of Aeronautics and Astronautics,2015:616.
- [17]FENG Y,YU X,MAN Z. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators[J]. Automatica,2002,38(12):2159-2167.

(责任编辑:高丽华)