

具有分布式时滞与一步随机时滞系统的 H_∞ 滤波

赵忠义, 邹磊, 宋保业

(山东科技大学 电气与自动化工程学院, 山东 青岛 266590)

摘要: 研究了一类具有分布式时滞与一步随机时滞的网络化系统的 H_∞ 滤波问题。系统的测量数据在传输时会发生一步随机时滞现象, 该现象发生概率服从伯努利分布。针对这类系统, 设计了一类特殊的 H_∞ 滤波器。利用随机分析结合李亚普诺夫稳定性理论, 给出了滤波误差系统均方指数稳定且具有给定 H_∞ 性能的一个充分条件, 并利用线性矩阵不等式方法给出了所需 H_∞ 滤波器参数的显示表达。最后通过仿真算例验证了所提理论的有效性。

关键词: 网络化系统; 分布式时滞; 随机时滞; H_∞ 滤波; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标志码: A

文章编号: 1672-3767(2017)04-0101-07

DOI: 10.16452/j.cnki.sdkjzk.2017.04.015

H_∞ Filtering for a Class of Networked Systems with Distributed Delays and One-step Random Delays

ZHAO Zhongyi, ZOU Lei, SONG Baoye

(College of Electrical Engineering and Automation, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: In this paper, the H_∞ filtering problem of a class of networked systems with both distributed delays and one-step random delays was investigated. One-step random delays would happen when the measured data of the systems was transmitted and the probability of occurrence complied with the Bernoulli distribution law. A H_∞ filter was designed for this class of systems. Based on the Lyapunov stability theory combined with stochastic analysis approach, a sufficient condition was derived under which the filtering error system is exponential stable in the mean square with a prescribed H_∞ filtering performance. The explicit expression for the desired filter parameter was then given in terms of the solutions of a set of linear matrix inequalities. A numerical example was given to verify the effectiveness of the proposed method of this paper.

Key words: networked systems; distributed time delays; random delays; H_∞ filtering; linear matrix inequality

近年来,由传感器、执行器、控制器与滤波器通过网络构成的网络化系统以其成本低、设计灵活、易于扩展、便于维护等优点受到了越来越多的关注,逐步成为控制界及工业界的研究热点^[1-2]。在网络化系统中,被控对象通过网络与控制器、滤波器等部件相连接。由于网络带宽有限等因素的影响,数据在传输过程中会产生时滞现象,并且该现象的发生具有随机性,使得要研究的网络化系统不再是确定性的,而成为随机系统^[3-7]。

收稿日期: 2017-04-08

基金项目: 中国博士后科学基金项目(2016M600547); 山东省高等学校科研计划项目(J14LN34)

作者简介: 赵忠义(1994—),男,山东泰安人,硕士研究生,从事网络化控制和滤波研究. E-mail: 15764246411@163.com

邹磊(1987—),男,江西新余人,博士后,研究方向为网络化系统的控制及滤波等,本文通信作者.

E-mail: zoulei_cup@gmail.com

宋保业(1982—),男,山东青岛人,讲师,博士,研究方向为智能控制及其应用.

滤波是利用含有噪声的系统输出,来估计未知的系统内部状态或其线性组合。当作用在系统上的扰动的统计特性难以确定时,可将扰动视为能量有限的任意信号而采用 \mathcal{H}_∞ 滤波的方法^[12-15]。本文研究一类同时具有分布式时滞与一步随机时滞的网络化系统的 \mathcal{H}_∞ 滤波问题。首先给定滤波器参数,运用线性矩阵不等式的方法,导出滤波误差系统均方指数稳定和具有 \mathcal{H}_∞ 扰动衰减水平 γ 的与时滞相关的充分条件。然后根据文献[10]得到了依赖于时滞的滤波器显示表达。最后通过一个仿真算例验证了本文所提出的理论的有效性。文中, \mathbf{Z}^+ 表示全体正整数组成的集合。 \mathbf{R}^n 表示 n 维欧氏空间。实矩阵 $\mathbf{P} > 0$ 表示矩阵 \mathbf{P} 是正定矩阵。 \mathbf{I} 表示具有适当维数的单位矩阵; $\mathbf{0}$ 表示具有适当维数的零矩阵。如果文中的某矩阵没有给出维数,则是假定该矩阵的维数满足矩阵的运算法则。符号“ \mathbf{T} ”代表转置;符号“ $*$ ”表示对称矩阵中分块矩阵的转置。文中所有的“ $\|\cdot\|$ ”符号均表示向量的欧氏范数;序列 $\boldsymbol{\omega} = \{\boldsymbol{\omega}(k)\} \in l_2[0, \infty)$ 表示 $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{\omega}^T(k)\boldsymbol{\omega}(k) < \infty$ 。 $\text{Prob}\{\cdot\}$ 表示事件发生的概率; $\text{E}\{\cdot\}$ 表示随机变量的数学期望。

1 问题描述

考虑一类带有分布式时滞的离散时间系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_d \sum_{j=1}^d \tau_j \mathbf{x}(k-j) + \mathbf{B}\boldsymbol{\omega}(k), \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}(k), \\ \mathbf{z}(k) = \mathbf{L}\mathbf{x}(k), \\ \mathbf{x}(k) = \boldsymbol{\psi}(k), k \in \{-d, -d+1, \dots, 0\}. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量, $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{R}^q$ 为输出向量, $\mathbf{z}(k) \in \mathbf{R}^l$ 为待估计的信号, $\boldsymbol{\omega}(k) \in \mathbf{R}^r$ 为能量有界的外部扰动, $\boldsymbol{\psi}(k)$ 为 $\mathbf{x}(k)$ 的初值函数, $\mathbf{A}, \mathbf{A}_d, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{L}$ 表示具有适当维数的常数矩阵,常数 $\tau_j \geq 0 (j = 1, 2, \dots, d)$ 。

系统的测量输出 $\bar{\mathbf{y}}(k)$ 带有一步随机时滞:

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = \alpha(k)\mathbf{y}(k) + (1 - \alpha(k))\mathbf{y}(k-1), \quad (2)$$

其中,随机变量 $\alpha(k)$ 服从Bernoulli分布,即

$$\text{Prob}\{\alpha(k)=1\} = \text{E}\{\alpha(k)\} = \rho, \quad \text{Prob}\{\alpha(k)=0\} = \text{E}\{1-\alpha(k)\} = 1-\rho. \quad (3)$$

$\rho \in [0, 1]$ 为已知的常数。

考虑如下滤波器:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{A}_d \sum_{j=1}^d \tau_j \hat{\mathbf{x}}(k-j) + \mathbf{K}[\bar{\mathbf{y}}(k) - \rho\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) - (1-\rho)\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k-1)], \\ \hat{\mathbf{z}}(k) = \mathbf{L}\hat{\mathbf{x}}(k), \\ \hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\boldsymbol{\psi}}(k), k \in \{-d, -d+1, \dots, 0\}. \end{cases} \quad (4)$$

其中: $\hat{\mathbf{x}}(k) \in \mathbf{R}^n$ 表示滤波器的状态, $\bar{\mathbf{y}}(k) \in \mathbf{R}^q$ 表示滤波器的输入, $\hat{\boldsymbol{\psi}}(k)$ 表示 $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 的初值函数, \mathbf{K} 为待设计的滤波器参数。

定义:

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k), \quad \boldsymbol{\eta}(k) = [\mathbf{x}^T(k) \quad \mathbf{e}^T(k)]^T, \quad \bar{\mathbf{z}}(k) = \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k), \quad \bar{\alpha}(k) = \alpha(k) - \rho. \quad (5)$$

由式(1)、式(4)可得滤波误差系统模型:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}(k+1) = [-\bar{\alpha}(k)\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}]\boldsymbol{\eta}(k) + [\bar{\alpha}(k)\tilde{\mathbf{A}}_1 + \tilde{\mathbf{A}}_1]\boldsymbol{\eta}(k-1) \\ \quad + \mathbf{A}_d \sum_{j=1}^d \tau_j \boldsymbol{\eta}(k-j) + [-\bar{\alpha}(k)\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{B}}]\boldsymbol{\omega}(k) + [\bar{\alpha}(k)\tilde{\mathbf{B}}_1 + \tilde{\mathbf{B}}_1]\boldsymbol{\omega}(k-1), \\ \bar{\mathbf{z}}(k) = \tilde{\mathbf{L}}\boldsymbol{\eta}(k). \end{cases} \quad (6)$$

其中, $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{KC} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \rho\mathbf{KC} \end{bmatrix}, \tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{KC} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\rho-1)\mathbf{KC} \end{bmatrix}, \tilde{A}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{KD} \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} - \rho\mathbf{KD} \end{bmatrix}, \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{KD} \end{bmatrix}, \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ (\rho-1)\mathbf{KD} \end{bmatrix}, \bar{L} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{L}]。$

定义 1^[8] 在外部扰动 $\omega(k)$ 恒等于零条件下, 如果存在常数 $\beta > 0$ 与常数 $\lambda \in (0, 1)$, 使得

$$E\{\|\eta(k)\|^2\} \leq \beta \lambda^k E\{\|\eta(0)\|^2\}。 \quad (7)$$

对任意 $\eta(0) \in \mathbf{R}^{2n}$, $k \in \mathbf{Z}^+$ 成立, 则称滤波误差系统(6)是均方指数稳定的。

定义 2^[9] 对于给定的常数 $\gamma > 0$ 及非零的 $\omega(k)$, 若滤波误差系统(6)均方指数稳定, 且在零初始条件下,

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\{\|\bar{z}(k)\|^2\} \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \|\omega(k)\|^2。 \quad (8)$$

成立, 则称滤波误差系统(6)具有 H_∞ 性能 γ 。

本研究的主要目的为设计(4)式表示的滤波器, 使得在外部扰动 $\omega(k)$ 恒等于 $\mathbf{0}$ 的情况下滤波误差系统(6)均方指数稳定; 并且使滤波误差系统(6)在零初始条件下, 具有给定的 H_∞ 性能。

2 主要结果

首先引入需要使用的两个引理。

引理 1^[10] 对于给定的常矩阵 S_1, S_2, S_3 , 其中 $S_1 = S_1^T, S_2 > 0, S_1 + S_3^T S_2^{-1} S_3 < 0$ 等价于

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_3^T \\ S_3 & -S_2 \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} -S_2 & S_3 \\ S_3^T & S_1 \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

引理 2^[11] 设 M 为 n 阶正定矩阵, $x_i \in \mathbf{R}^n$, 常数 $a_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, d)$, 则有:

$$\left(\sum_{i=1}^d a_i x_i\right)^T M \left(\sum_{i=1}^d a_i x_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^d a_i\right) \sum_{i=1}^d a_i x_i^T M x_i。 \quad (9)$$

下面给出滤波误差系统(6)均方指数稳定并且具有给定的 H_∞ 性能 γ 的一个充分条件。

定理 1 给定滤波器参数 K 及常数 $\gamma > 0$, 如果存在矩阵 $P > \mathbf{0}, Q > \mathbf{0}, R > \mathbf{0}$, 使得

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ * & \Omega_3 \end{bmatrix}。 \quad (10)$$

其中, $\Omega_1 = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \bar{A}^T P \tilde{A}_d \\ * & \Lambda_{22} & \bar{A}_1^T P \tilde{A}_d \\ * & * & \bar{A}_d^T P \tilde{A}_d - \frac{1}{\tau} R \end{bmatrix}, \Omega_2 = \begin{bmatrix} \Lambda_{14} & \Lambda_{15} \\ \Lambda_{24} & \Lambda_{25} \\ \tilde{A}_d^T P \tilde{B} & \tilde{A}_d^T P \tilde{B}_1 \end{bmatrix}, \Omega_3 = \begin{bmatrix} \Lambda_{44} & \Lambda_{45} \\ * & \Lambda_{55} \end{bmatrix},$

$$\Lambda_{11} = \rho(1-\rho)\tilde{A}^T P \tilde{A} + \bar{A}^T P \bar{A} - P + Q + \tau R + \bar{L}^T \bar{L},$$

$$\Lambda_{12} = -\rho(1-\rho)\tilde{A}^T P \tilde{A}_1 + \bar{A}^T P \bar{A}_1, \Lambda_{14} = \rho(1-\rho)\tilde{A}^T P \tilde{B} + \bar{A}^T P \bar{B},$$

$$\Lambda_{15} = -\rho(1-\rho)\tilde{A}^T P \tilde{B}_1 + \bar{A}^T P \bar{B}_1, \Lambda_{22} = \rho(1-\rho)\tilde{A}_1^T P \tilde{A}_1 + \bar{A}_1^T P \bar{A}_1 - Q,$$

$$\Lambda_{24} = -\rho(1-\rho)\tilde{A}_1^T P \tilde{B} + \bar{A}_1^T P \bar{B}, \Lambda_{25} = \rho(1-\rho)\tilde{A}_1^T P \tilde{B}_1 + \bar{A}_1^T P \bar{B}_1,$$

$$\Lambda_{44} = -\frac{1}{2}\gamma^2 I + \rho(1-\rho)\tilde{B}^T P \tilde{B} + \bar{B}^T P \bar{B}, \Lambda_{45} = -\rho(1-\rho)\tilde{B}^T P \tilde{B}_1 + \bar{B}^T P \bar{B}_1,$$

$$\Lambda_{55} = -\frac{1}{2}\gamma^2 I + \rho(1-\rho)\tilde{B}_1^T P \tilde{B}_1 + \bar{B}_1^T P \bar{B}_1, \tau = \sum_{j=1}^d \tau_j。$$

则滤波误差系统(6)在 $\omega(k) \equiv \mathbf{0}$ 时均方指数稳定, 且在零初始条件下, 对任意非零的 $\omega(k) \in l_2[0, \infty)$, 满足以下 H_∞ 性能约束:

$$\sum_{k=0}^{\infty} E\{\|\bar{z}(k)\|^2\} \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \|\omega(k)\|^2. \quad (11)$$

证明:对滤波误差系统(6)构造李亚普诺夫函数

$$V(k) = \sum_{i=1}^3 V_i(k), \text{ 其中, } V_1(k) = \boldsymbol{\eta}^T(k-1)\mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}(k-1), V_2(k) = \sum_{m=1}^d \tau_m \sum_{j=k-m}^{k-1} \boldsymbol{\eta}^T(j)\mathbf{R}\boldsymbol{\eta}(j), V_3(k) = \boldsymbol{\eta}^T(k)\mathbf{P}\boldsymbol{\eta}(k), \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R} \text{ 为待确定的正定矩阵.}$$

$$E\{\Delta V(k) | V(k)\} = E\{V(K+1) - V(k) | V(k)\} = \sum_{i=1}^3 E\{\Delta V_i(K) | V(k)\}, \quad (12)$$

$$E\{\Delta V_1(k) | V(k)\} = \boldsymbol{\eta}^T(k)\mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}(k) - \boldsymbol{\eta}^T(k-1)\mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}(k-1). \quad (13)$$

根据引理 2 可得

$$\begin{aligned} E\{\Delta V_2(k) | V(k)\} &= \sum_{m=1}^d \tau_m \sum_{j=k+1-m}^k \boldsymbol{\eta}^T(j)\mathbf{R}\boldsymbol{\eta}(j) - \sum_{m=1}^d \tau_m \sum_{j=k-m}^{k-1} \boldsymbol{\eta}^T(j)\mathbf{R}\boldsymbol{\eta}(j) \\ &= \sum_{m=1}^d \tau_m (\boldsymbol{\eta}^T(k)\mathbf{R}\boldsymbol{\eta}(k) - \boldsymbol{\eta}^T(k-m)\mathbf{R}\boldsymbol{\eta}(k-m)) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\leq \bar{\tau} \boldsymbol{\eta}^T(k)\mathbf{R}\boldsymbol{\eta}(k) - \frac{1}{\bar{\tau}} \left(\sum_{j=1}^d \tau_j \boldsymbol{\eta}(k-m) \right)^T \mathbf{R} \left(\sum_{j=1}^d \tau_j \boldsymbol{\eta}(k-j) \right),$$

$$\begin{aligned} E\{\Delta V_3(k) | V(k)\} &= E\{ \boldsymbol{\eta}^T(k+1)\mathbf{P}\boldsymbol{\eta}(k+1) - \boldsymbol{\eta}^T(k)\mathbf{P}\boldsymbol{\eta}(k) | V(k) \} \\ &= \boldsymbol{\eta}^T(k) [\rho(1-\rho)\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}\mathbf{P}\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{P}] \boldsymbol{\eta}(k) \\ &+ \boldsymbol{\eta}^T(k-1) [\rho(1-\rho)\tilde{\mathbf{A}}_1\mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_1\mathbf{P}\bar{\mathbf{A}}_1] \boldsymbol{\eta}(k-1) \\ &+ \left(\sum_{j=1}^d \tau_j \boldsymbol{\eta}(k-m) \right)^T \tilde{\mathbf{A}}_d^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{A}}_d \left(\sum_{j=1}^d \tau_j \boldsymbol{\eta}(k-j) \right) \\ &+ \boldsymbol{\omega}^T(k) [\rho(1-\rho)\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{B}}] \boldsymbol{\omega}(k) \\ &+ \boldsymbol{\omega}^T(k-1) [\rho(1-\rho)\tilde{\mathbf{B}}_1^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{B}}_1 + \bar{\mathbf{B}}_1^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{B}}_1] \boldsymbol{\omega}(k-1) \\ &+ 2\boldsymbol{\eta}^T(k) [-\rho(1-\rho)\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}_1 + \bar{\mathbf{A}}\mathbf{P}\bar{\mathbf{A}}_1] \boldsymbol{\eta}(k-1) \\ &+ 2\boldsymbol{\eta}^T(k) \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{A}}_d \left(\sum_{j=1}^d \tau_j \boldsymbol{\eta}(k-j) \right) \\ &+ 2\boldsymbol{\eta}^T(k) [\rho(1-\rho)\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P}\tilde{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{A}}\mathbf{P}\bar{\mathbf{B}}] \boldsymbol{\omega}(k) \\ &+ 2\boldsymbol{\eta}^T(k) [-\rho(1-\rho)\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P}\tilde{\mathbf{B}}_1 + \bar{\mathbf{A}}\mathbf{P}\bar{\mathbf{B}}_1] \boldsymbol{\omega}(k-1) \\ &+ 2\boldsymbol{\eta}^T(k-1) \bar{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{A}}_d \left(\sum_{j=1}^d \tau_j \boldsymbol{\eta}(k-j) \right) \\ &+ 2\boldsymbol{\eta}^T(k-1) [-\rho(1-\rho)\tilde{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{B}}] \boldsymbol{\omega}(k) \\ &+ 2\boldsymbol{\eta}^T(k-1) [\rho(1-\rho)\tilde{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{B}}_1 + \bar{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{B}}_1] \boldsymbol{\omega}(k-1) \\ &+ 2 \left(\sum_{j=1}^d \tau_j \boldsymbol{\eta}(k-j) \right)^T \tilde{\mathbf{A}}_d^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{B}} \boldsymbol{\omega}(k) \\ &+ 2 \left(\sum_{j=1}^d \tau_j \boldsymbol{\eta}(k-j) \right)^T \tilde{\mathbf{A}}_d^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{B}}_1 \boldsymbol{\omega}(k-1) \\ &+ 2\boldsymbol{\omega}^T(k) [-\rho(1-\rho)\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{B}}_1 + \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{B}}_1] \boldsymbol{\omega}(k-1), \end{aligned} \quad (15)$$

令

$$\boldsymbol{\zeta}(k) = \left[\boldsymbol{\eta}^T(k), \boldsymbol{\eta}^T(k-1), \sum_{j=1}^d \tau_j \boldsymbol{\eta}^T(k-j) \right]^T, \quad (16)$$

$$\tilde{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \bar{\mathbf{L}}^T \bar{\mathbf{L}} & \mathbf{A}_{12} & \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{A}}_d \\ * & \mathbf{A}_{22} & \bar{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{A}}_d \\ * & * & \bar{\mathbf{A}}_d^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{A}}_d - \frac{1}{\bar{\tau}} \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

根据定理 1 得:在 $\omega(k) = \omega(k-1) = 0$ 时, $\zeta^T(k) \tilde{\Omega}_1 \zeta(k) \leq \zeta^T(k) \Omega_1 \zeta(k) < 0$ 。

由文献[3]的定理 1 可以证明系统均方指数稳定。

下面证明滤波误差系统(6)具有 \mathcal{H}_∞ 性能 γ 。令 $\xi(k) = [\zeta^T(k) \quad \omega^T(k) \quad \omega^T(k-1)]^T$ ，
在零初始条件下,考虑如下性能指标:

$$\begin{aligned} J(n) &= \mathbb{E} \sum_{k=0}^n \{z^T(k)z(k) - \frac{1}{2} \gamma^2 \omega^T(k)\omega(k) - \frac{1}{2} \gamma^2 \omega^T(k-1)\omega(k-1)\} \\ &= \mathbb{E} \sum_{k=0}^n \{ \eta^T(k) \bar{\mathbf{L}}^T \bar{\mathbf{L}} \eta(k) - \frac{1}{2} \gamma^2 \omega^T(k)\omega(k) - \frac{1}{2} \gamma^2 \omega^T(k-1)\omega(k-1) + \Delta V(k) \} \\ &\quad - \mathbb{E}\{V(n+1)\} - \mathbb{E}\{V(0)\} \\ &\leq \mathbb{E} \sum_{k=0}^n \xi^T(k) \Omega \xi(k), \end{aligned} \quad (20)$$

根据定理 1,由 $\Omega < 0$ 可得 $J(n) < 0$,又因为

$$\begin{aligned} J(n) &= \mathbb{E} \sum_{k=0}^n \{ \eta^T(k) \bar{\mathbf{L}}^T \bar{\mathbf{L}} \eta(k) - \frac{1}{2} \gamma^2 \omega^T(k)\omega(k) - \frac{1}{2} \gamma^2 \omega^T(k)\omega(k) \} \\ &\quad - \frac{1}{2} \gamma^2 \omega^T(-1)\omega(-1) + \frac{1}{2} \gamma^2 \omega^T(n)\omega(n) \\ &\leq \mathbb{E} \sum_{k=0}^n \{ \eta^T(k) \bar{\mathbf{L}}^T \bar{\mathbf{L}} \eta(k) - \gamma^2 \omega^T(k)\omega(k) \} + \frac{1}{2} \gamma^2 \omega^T(n)\omega(n), \end{aligned} \quad (21)$$

令 $n \rightarrow \infty$,由定义 2 可得滤波误差系统(6)具有给定的 \mathcal{H}_∞ 性能 γ 。

定理 2 给定常数 $\gamma > 0$,如果存在矩阵 $\mathbf{P} = \text{diag}\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2\} > 0, \mathbf{Q} > 0, \mathbf{R} > 0, \mathbf{Z}$ 使得

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -\mathbf{Q} & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\bar{\tau}} \mathbf{R} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \gamma^2 \mathbf{I} & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \gamma^2 \mathbf{I} & * & * \\ \Omega_{61} & \Omega_{62} & \mathbf{P} \tilde{\mathbf{A}}_d & \Omega_{64} & \Omega_{65} & -\mathbf{P} & * \\ \Omega_{71} & \Omega_{72} & 0 & \Omega_{74} & \Omega_{75} & 0 & -\mathbf{P} \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

其中, $\Omega_{11} = -\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \bar{\tau} \mathbf{R} + \bar{\mathbf{L}}^T \bar{\mathbf{L}}, \Omega_{61} = \mathbf{P} \mathbf{A}_4 - \rho \mathbf{A}_1 \mathbf{Z} \mathbf{A}_3, \Omega_{62} = (\rho - 1) \mathbf{A}_1 \mathbf{Z} \mathbf{A}_3, \Omega_{64} = \mathbf{P} \mathbf{A}_5 - \rho \mathbf{A}_1 \mathbf{Z} \mathbf{D}, \Omega_{65} =$
 $(\rho - 1) \mathbf{A}_1 \mathbf{Z} \mathbf{D}, \Omega_{71} = \delta \mathbf{A}_1 \mathbf{Z} \mathbf{A}_2, \Omega_{72} = -\delta \mathbf{A}_1 \mathbf{Z} \mathbf{A}_2, \Omega_{74} = \delta \mathbf{A}_1 \mathbf{Z} \mathbf{D}, \Omega_{75} = -\delta \mathbf{A}_1 \mathbf{Z} \mathbf{D}, \delta = \sqrt{\rho(1 - \rho)}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix},$

$\mathbf{A}_2 = [\mathbf{C} \quad 0], \mathbf{A}_3 = [0 \quad \mathbf{C}], \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \bar{\tau} = \sum_{j=1}^d \tau_j$ 。

那么滤波误差系统(6)均方指数稳定并且具有给定的 \mathcal{H}_∞ 性能 γ ,并且相应的滤波器参数矩阵满足 $\mathbf{K} = \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{Z}$ 。

证明:由定理 1 可知,对于给定的 $\gamma > 0$,如果存在矩阵 $\mathbf{P} > 0, \mathbf{Q} > 0, \mathbf{R} > 0$,使得 $\Omega < 0$,则滤波误差系统(6)均方指数稳定且具有给定的 \mathcal{H}_∞ 性能 γ 。对(10)式使用引理 1 即可证明。

注:根据 $\bar{\tau} = \sum_{j=1}^d \tau_j$, 可知随着时滞 d 的增大, $\bar{\tau}$ 随之增大, 而 $\bar{\tau}$ 的增加使得式(22) Ω_{11} 中的 $\bar{\tau}R$ 以及 $-\frac{1}{\bar{\tau}}R$

两项增大, 从而对式(22) 的成立是不利的。即, 随着时滞的增加, 所提出的系统稳定的条件越不容易满足, 系统也越不容易稳定; 当时滞增大到一定程度, 所提出的稳定性条件将不满足。

3 仿真算例

考虑具有以下参数的系统:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & -0.1 \\ 0.2 & 0.1 & -0.5 \\ 0.3 & -0.2 & -0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.1 \\ -0.3 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.3 & 0 \\ 0.2 & -0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.3 \\ -0.2 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & -0.7 \\ 0.1 & -0.5 & -0.4 \end{bmatrix}, L = [0.1 \quad 0.3 \quad -0.2]。 \quad (24)$$

取 $\gamma = 0.9, \rho = 0.9$, 时滞 $d = 2, \tau_j = 2^{1-j}$, 初值取 $x(0) = [10 \quad 20 \quad -40]^T, \hat{x}(0) = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, 外部的扰动 $\omega(k)$ 为:

$$\omega(k) = \begin{cases} 0.1, & 5 \leq k \leq 25 \\ -0.1, & 25 < k \leq 55 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (25)$$

为设计式(4)所示的具有 H_∞ 性能 γ 的滤波器同时使得滤波误差系统(6)均方指数稳定, 根据定理 2, 应用 Matlab 中的 LMI 工具箱, 可以求得如下的 H_∞ 滤波器参数:

$$K = \begin{bmatrix} -0.1083 & 0.1675 \\ 0.4170 & 0.0894 \\ -0.2917 & 0.6707 \end{bmatrix}。 \quad (26)$$

通过增大时滞 d 的值, 得到当 $d=5$ 时, 定理 2 给出的线性矩阵不等式已经没有可行解, 由此验证了对时滞对于系统的影响的分析。

仿真结果如图 1 所示: $k \geq 10$ 时, 估计值已接近真实值; $k \geq 40$ 时, 估计误差达到 0。由此验证了滤波误差系统均方稳定。

4 结论

讨论了具有分布式时滞与随机一步时滞的网络化系统的 H_∞ 滤波器的设计问题。将系统的测量数据在传输时产生的随机一步时滞描述为伯努利分布。运用 LMI 方法给出了滤波误差系统均方指数稳定并且具有给定的 H_∞ 性能的一个充分条件, 同时得到了待设计的滤波器参数的显示表达。最后通过一个仿真算例证明了本文提出的理论的有效性。

参考文献:

- [1] WALSH G C, YE H. Scheduling of networked control systems[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2001, 21(1): 57-65.
- [2] DONG H, WANG Z, GAO H. Robust filtering for a class of nonlinear networked systems with multiple stochastic communi-

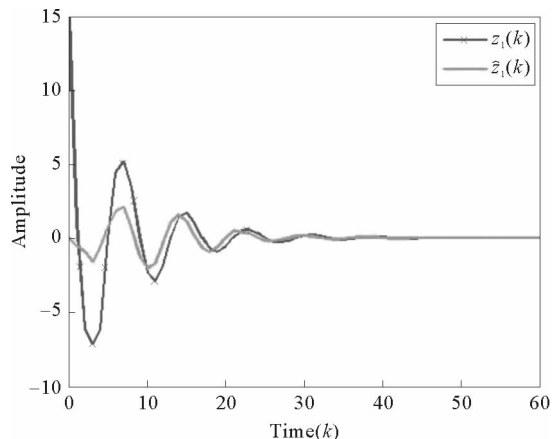


图 1 $z(k)$ 与 $\hat{z}(k)$ 的状态轨迹

Fig. 1 State trajectories of $z(k)$ and $\hat{z}(k)$

- cation delays and packet dropouts[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(4): 1957-1966.
- [3] WANG Z, HO D W C, LIU Y, et al. Robust \mathcal{H}_∞ control for a class of nonlinear discrete time-delay stochastic systems with missing measurements[J]. Automatica, 2009, 45(3): 684-691.
- [4] ZHOU S, FENG G. \mathcal{H}_∞ filtering for discrete-time systems with randomly varying sensor delays[J]. Automatica, 2008, 44(7): 1918-1922.
- [5] WANG Z, LIU Y, LIU X. \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain stochastic time-delay systems with sector-bounded nonlinearities[J]. Automatica, 2008, 44(5): 1268-1277.
- [6] WEI G, WANG Z, SHU H. Robust filtering with stochastic nonlinearities and multiple missing measurements[J]. Automatica, 2009, 45(3): 836-841.
- [7] 蔡逢煌, 王武, 林琼斌, 等. 具有一步随机通讯时延的网络化切换系统 \mathcal{H}_∞ 滤波[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(3): 309-314. CAI Fenghuang, WANG Wu, LIN Qiongbina, et al. \mathcal{H}_∞ filtering for networked switched systems with random communication time-delays[J]. Control Theory & Applications, 2011, 28(3): 309-314.
- [8] SONG H, YU L, ZHANG W A. \mathcal{H}_∞ filtering of network-based systems with random delay[J]. Signal Processing, 2009, 89(4): 615-622.
- [9] ZHANG L, BOUKAS E K. Mode-dependent \mathcal{H}_∞ filtering for discrete-time Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities[J]. Automatica, 2009, 45(6): 1462-1467.
- [10] BOYD S P, GHAOUI E L, FERON E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [11] LIU Y, WANG Z, LIANG J, et al. Synchronization and state estimation for discrete-time complex networks with distributed delays[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 2008, 38(5): 1314-1325.
- [12] LI F, SHI P, WANG X, et al. Robust \mathcal{H}_∞ filtering for networked control systems with Markovian jumps and packet dropouts[J]. Modeling, Identification and Control, 2014, 35(3): 159-168.
- [13] CHANG X, YANG G. Robust \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain discrete-time systems using parameter dependent Lyapunov functions[J]. Journal of Control Theory and Applications, 2013, 11(1): 122-127.
- [14] ZHANG Y, WEI Y, ZHAO M. \mathcal{H}_∞ filtering for networked systems with Markov interval delay and random measurement [C]//Proceedings of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA), Shenyang, 2014: 4498-4503.
- [15] 俞立. 鲁棒控制—线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.

(责任编辑: 吕海亮)